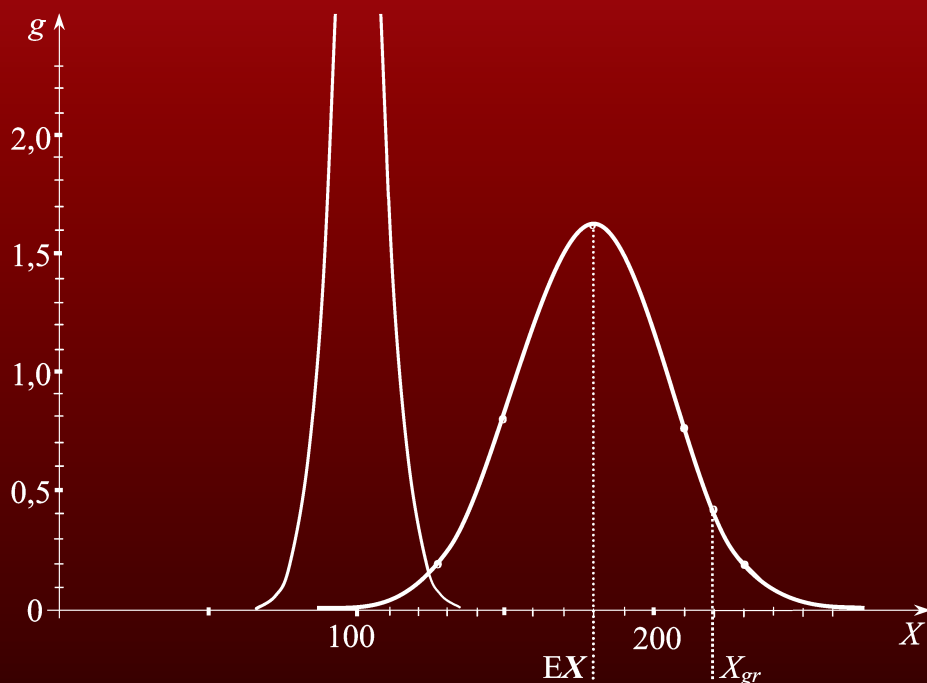


Tadeusz Szopa
Tomasz Pancewicz
Marek Matyjewski

Probabilistyka dla inżynierów

w przykładach i zadaniach



Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej

Probabilistyka dla inżynierów

w przykładach i zadaniach

Tadeusz Szopa
Tomasz Pancewicz
Marek Matyjewski

Probabilistyka dla inżynierów

w przykładach i zadaniach

Warszawa 2021
Oficina Wydawnicza Politechniki Warszawskiej



Probabilistyka dla inżynierów w przykładach i zadaniach

Wydanie I

Słowa kluczowe: probabilistyka w zadaniach inżynierskich, rozkłady zmiennych losowych w inżynierii, zmienne losowe ciągłe i dyskretne, zdarzenia losowe, statystyczna analiza wyników eksperymentu, estymacja cechy, estymacja prawdopodobieństwa, metody eksperckie

Recenzent

prof. dr hab. inż. Józef Szala

Korekta

Teresa Woźniak

Projekt okładki

Danuta Czudek-Puchalska

Skład komputerowy

Beata Zalewska-Kraśniewska

Andrzej Kowalczyk

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2021

Wydawca: Politechnika Warszawska

Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej (UIW 48800)

ul. Polna 50, 00-644 Warszawa, tel. 22 234-70-83

Księgarnia internetowa Oficyny Wydawniczej PW www.wydawnictwopw.pl

tel. 22 234-75-03; e-mail: oficyna@pw.edu.pl

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych, w tym nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w Internecie bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich

ISBN 978-83-8156-297-3 (druk)

ISBN 978-83-8156-298-0 (online)

Zamówienie nr 22/2021

Druk i oprawa: Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Warszawskiej, tel. 22 234-70-30

Przedmowa	7
1. WSTĘP	9
2. ZMIENNE LOSOWE CIĄGŁE I ICH FUNKCJE	14
2.1. Podstawowe cechy zmiennej losowej ciągłej	14
2.2. Rozkład normalny	20
2.3. Rozkład logarytmiczno-normalny	34
2.4. Rozkład Weibulla	49
2.5. Rozkład wykładniczy	56
2.6. Funkcje zmiennych losowych ciągłych	70
3. ZMIENNE LOSOWE DYSKRETNE	103
3.1. Podstawowe cechy zmiennej losowej dyskretnej	103
3.2. Rozkład dwumianowy	104
3.3. Rozkład Poissona	112
4. ZDARZENIA LOSOWE	125
4.1. Pojęcie zdarzenia losowego i prawdopodobieństwa zdarzenia losowego	125
4.2. Działania na zdarzeniach losowych	127
4.3. Metody graficzne w probabilistycznym opisie działań na zdarzeniach	143
5. ELEMENTY STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ	165
5.1. Podstawowe pojęcia i rozkłady prawdopodobieństwa wykorzystywane w statystyce matematycznej	165
5.2. Estymacja cechy	170
5.3. Estymacja prawdopodobieństwa	181
5.4. Metody eksperckie szacowania prawdopodobieństw zdarzeń	194
6. INFORMACJA O PROCESACH STOCHASTYCZNYCH	206
ZAŁĄCZNIKI	212
Załącznik 1. Wartości dystrybucyj standardyzowanego rozkładu normalnego	212
Załącznik 2. Wartości kwantyla rozkładu t Studenta	213
Załącznik 3. Wartości kwantyla rozkładu F Snedecora	214
Bibliografia	216

Celem przedstawianego zbioru przykładów i zadań jest zaoferowanie studentom materiałów pomocniczych, dodatkowych do kursu wykładów z probabilistyki i statystyki matematycznej. Książka przeznaczona jest dla studentów uczelni technicznych, zwłaszcza studentów wydziałów mechanicznych.

Jesteśmy dzisiaj świadkami oraz uczestnikami procesu cyfrowej transformacji otaczającej nas rzeczywistości. Informacja o otaczającym świecie jest coraz łatwiej dostępna w formie cyfrowej, a coraz większa dostępność danych stwarza możliwości zastąpienia tradycyjnie stosowanych modeli deterministycznych do opisu i analizy otaczającej nas rzeczywistości modelami probabilistycznymi. Modele probabilistyczne stają się częścią praktycznej codzienności w wielu zawodach, w tym codzienności inżynierskiej.

Wiedza z zakresu probabilistyki umożliwia inżynierowi opis analizowanej rzeczywistości, uwzględniający wpływ czynników losowych na wynik analizy. W rezultacie zastosowania w obliczeniach inżynierskich modeli probabilistycznych, m.in. wytrzymałości i trwałości elementów projektowanego urządzenia, można zmniejszyć rozmiar niepewności dotyczącej rezultatów tych obliczeń.

W ramach swoich działań każdy inżynier styka się również z potrzebą przeprowadzenia eksperymentu. Powinien więc dysponować wiedzą konieczną do zorganizowania, przeprowadzenia eksperymentu, a szczególnie do właściwego zinterpretowania uzyskanych wyników.

Wiedza wynikająca z takich potrzeb jest przekazywana studentom uczelni technicznych w ramach kursu probabilistyki i statystyki matematycznej. Oprócz wykładów studenci mają do dyspozycji bogate piśmiennictwo z tego działu matematyki. Brakuje jednak podręczników lub skryptów, które ułatwiałyby stosowanie zasad tej nauki w praktyce, czyli pozycji o charakterze zbioru przykładów i zadań, zwłaszcza w praktyce inżyniera mechanika. Tę lukę według zamierzeń autorów wypełnia niniejszy skrypt. Dzięki temu skrypt może być wykorzystywany nie tylko jako materiał pomocniczy do wykładów z zakresu probabilistyki i statystyki matematycznej, lecz także jako dodatkowa pozycja pomocnicza do in-

nych wykładów w zakresie: analizy ryzyka, niezawodności, miernictwa, technik eksperymentu, podstaw konstrukcji maszyn itd. Wykłady te, a przede wszystkim wykłady z podstaw probabilistyki i statystyki matematycznej, są prowadzone na wydziałach mechanicznych uczelni technicznych na różnych poziomach studiów. Zatem przedstawiany zbiór przykładów i zadań może być pożyteczną lekturą dla słuchaczy pierwszego i drugiego stopnia studiów.

Skrypt składa się z 6 rozdziałów. Dwa z nich dotyczą zmiennych losowych, ciągłych i skokowych (dyskretnych). Są w nich przedstawione w przykładach i zadaniach rozkłady prawdopodobieństwa, najczęściej wykorzystywane przez inżyniera mechanika między innymi do opisu rozrzutów losowych właściwości wytrzymałościowych materiałów konstrukcyjnych (np. granicy wytrzymałości R_m , granicy plastyczności R_e , granicy zmęczenia Z) i trwałości elementów (trwałości zmęczeniowej, trwałości łożysk tocznych i in.). Jeden z rozdziałów, rozdział 4, jest poświęcony zdarzeniom losowym, także w zastosowaniach inżynierskich (w tym w modelowaniu i analizach niezawodności i ryzyka w systemach technicznych). W rozdziale 5 są przedstawione zastosowania podstaw statystyki matematycznej do analizowania i właściwego interpretowania danych statystycznych oraz wyników badań eksperymentalnych.

W każdym z rozdziałów zastosowano ten sam układ treści, zawierający:

- przypomnienie z kursu probabilistyki podstawowych zasad i wzorów,
- przykłady zadań, głównie z zakresu inżynierii mechanicznej, z rozwiązaniami (80 przykładów),
- treści zadań bez rozwiązań, do samodzielnego rozwiązania przez studenta (110 zadań).

W ostatnim, krótkim rozdziale dotyczącym procesów stochastycznych, pokazany jest wpływ losowości głównie na przebiegi w czasie pewnych, ważnych w inżynierii mechanicznej, zjawisk. Ma on jedynie charakter informacyjny i nie zawiera zadań obliczeniowych.

W końcowej części skryptu są zamieszczone trzy załączniki. Podane są w nich tabele danych liczbowych potrzebnych przy rozwiązywaniu zadań.

Autorzy

Sierpień 2021 r.

*Przypadek rządzi połową naszych działań,
a my kierujemy resztą.*

N. Machiavelli (1469–1527)

Inżynier nie jest w stanie w pełni rozpoznać tej rzeczywistości, którą się zajmuje w swojej działalności zawodowej, w tym w modelach obliczeniowych. Dotyczy to w szczególności sposobu eksploatacji obiektu mechanicznego, obciążeń, a więc także naprężeń, oraz właściwości materiałów, w tym naprężeń krytycznych w rozważanym fragmencie obiektu. Obliczeniom inżynierskim, a także całemu procesowi projektowania towarzyszy więc zawsze niepewność co do stopnia zgodności wyników obliczeń z rzeczywistością (na ogół – przyszłą), a więc i co do trafności decyzji podejmowanych na ich podstawie.

Główną pośrednią przyczyną tej niepewności jest *niedoskonałość intelektualna człowieka*. Na właściwości analizowanej przez człowieka rzeczywistości oraz na zjawiska i procesy w niej przebiegające ma wpływ zwykle bardzo duża liczba czynników, niemożliwa do uwzględnienia w pełni w rozumowaniu człowieka. W myślowym odwzorowywaniu analizowanej rzeczywistości, czyli w jej modelowaniu, człowiek uwzględnia tylko część z tych czynników. Są to te czynniki, które człowiek jest w stanie dostrzec dzięki posiadanej wiedzy. Mimo zwiększania się możliwości poznawania rzeczywistości i ciągłego wzrostu wiedzy człowieka, jest i pozostanie ona niepełna, gdyż istnieją granice możliwości poznawczych człowieka, a zwłaszcza intelektualnych. Można wręcz twierdzić, że proporcje określone w myśli filozofa Niccolo Machiavellego, zawartej w cytacie przytoczonym powyżej, są współcześnie podobne.

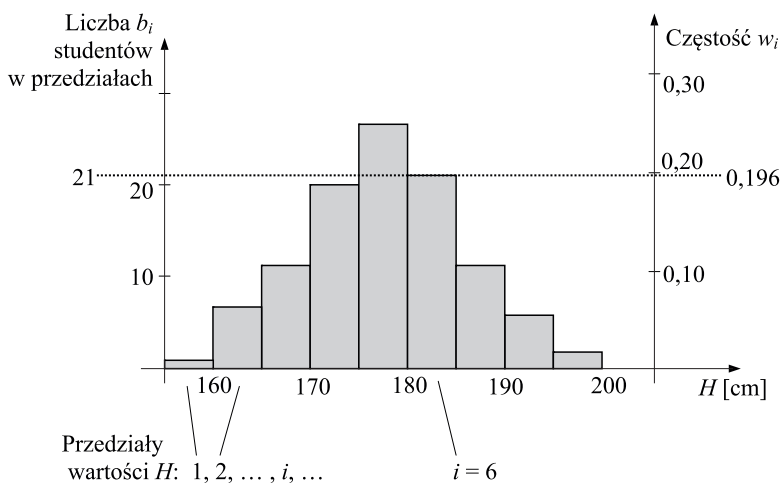
Te cechy analizowanej rzeczywistości, które człowiek jest w stanie dostrzec, potrafi w swoim rozumowaniu uwzględnić. Na wynik tego rozumowania ma jednak wpływ także druga grupa czynników, których człowiek nie jest w stanie dostrzec. Konsekwencją tego jest bardzo duży wpływ przypadku, losu na życie i rezultaty działań człowieka. Wiele zdarzeń w jego życiu pojawia się w chwilach trudnych do przewidzenia, dotyczy to także ich skutków. Z punktu widzenia człowieka mają więc one charakter losowy.

Jednym ze sposobów zmniejszania niepewności w rozumowaniu człowieka, a zwłaszcza inżyniera w prowadzonych przez niego obliczeniach i ilościowych

analizach cech, stanów i zjawisk, jest ich opis probabilistyczny. Jest to opis, który w sposób jawny uwzględnia wpływ przypadku na te cechy, stany i zjawiska. Tak na przykład każda z cech materii żywej i nieożywionej ma, według oceny człowieka – istoty niedoskonałej, mniejsze lub większe rozrzuty losowe. W celu ich ilustracji zbadajmy jedną z wielu cech człowieka, jaką jest jego wzrost. Wiadomo, że różnice tej cechy wśród mężczyzn i wśród kobiet są duże.

PRZYKŁAD 1.1

W celu określenia rozrzutu losowego wzrostu studentów przeprowadzono na jednym z wydziałów Politechniki Warszawskiej badania ankietowe. Każdy z $N = 107$ studentów (mężczyzn) tego samego rocznika podał informację o swoim wzroście. Wyniki pogrupowano w przedziały o szerokości $\Delta H = 5$ cm i na tej podstawie sporządzony został wykres częstości występowania wzrostu H w poszczególnych przedziałach (rys. 1.1).



Rys. 1.1. Histogram wzrostu studentów

Częstość ta może być wyrażona przez bezwzględną liczbę studentów, których wzrost znalazł się w przedziale i . Zwykle jednak przez pojęcie to rozumie się **częstość względną** w_i określaną za pomocą wyrażenia

$$w_i = \frac{b_i}{N}, \quad (1.1)$$

gdzie b_i to w analizowanym przykładzie liczba tych studentów spośród N , których wzrost został zakwalifikowany do przedziału i . Liczba studentów o wzroście

należącym na przykład do przedziału o numerze $i = 6$, czyli wzroście zawartym między 180 i 185 cm, wynosiła $b_i = 21$. Zatem częstość występowania wzrostu H w tym przedziale wynosi $w_i = \frac{b_i}{N} = \frac{21}{107} = 0,196$.

Wykres częstości dowolnej wielkości mającej rozrzuty losowe swoich wartości jest nazywany w statystyce matematycznej **histogramem**. Inne ważne pojęcia charakterystyczne dla statystyki matematycznej i ich zastosowanie w analizach inżynierskich są przedstawione w rozdziale 5.

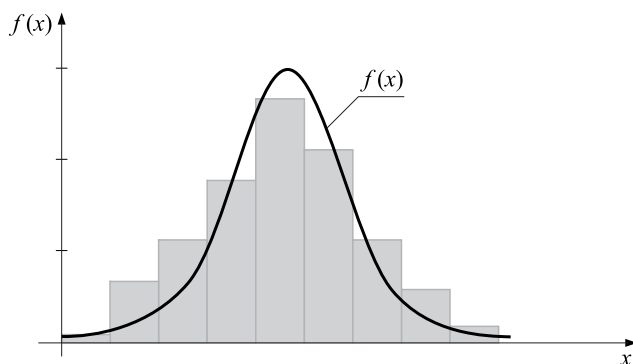
Częstość w_i można traktować jako statystyczny odpowiednik pojęcia prawdopodobieństwa, w rozważanym przykładzie – prawdopodobieństwa tego, że losowo wybrany z listy student ma wzrost zawarty w przedziale i . **Prawdopodobieństwo** jest to wielkość matematyczna będąca miarą możliwości wystąpienia określonego zdarzenia losowego. **Zdarzenie losowe** to zdarzenie, którego wyniku (skutku) człowiek nie jest w stanie jednoznacznie przewidzieć. Przykładem zdarzenia losowego może być znalezienie się wzrostu wybranego z listy studenta w określonym przedziale, np. w przedziale $180 < H \leq 185$ [cm]. Wielkość matematyczna nazywana prawdopodobieństwem przybiera wartości z przedziału $[0,1]$. Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1, a zdarzenia niemożliwego – 0. Zdarzeniom losowym i matematycznej analizie możliwości ich występowania poświęcony jest rozdział 4.

Wielkości, które w swoich obliczeniach stosuje inżynier, w szczególności inżynier-mechanik, i mających względnie duże rozrzuty losowe, jest wiele. Są to na przykład: wysokość chropowatości powierzchni elementu, wymiary elementu, granica plastyczności materiału konstrukcyjnego, granica zmęczenia materiału konstrukcyjnego, trwałość urządzenia, czas upływający do zmęczeniowego uszkodzenia elementu. Każda z takich wielkości może więc być traktowana w analizach jako tak zwana zmienna losowa. Przyjmijmy, że **zmienna losowa** jest to wielkość, która przybiera wartości z określonego przedziału w sposób przypadkowy, czyli wartości niemożliwe do jednoznacznego przewidzenia przez człowieka. Wymienione wielkości, jak również analizowany w przykładzie wzrost studenta, można zaliczyć do **zmiennych losowych ciągłych**, czyli takich, które mogą przybierać dowolne wartości z określonego przedziału. Do opisu **rozkładu prawdopodobieństwa** na te wartości zmiennej losowej ciągłej jest stosowana przede wszystkim funkcja $f(x)$ nazywana zwykle **gęstością prawdopodobieństwa** zmiennej losowej $x^{(1)}$ (rys. 1.2). Postać tej funkcji może wynikać na przykład z odpowiedniej aproksymacji empirycznego rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej, czyli histogramu.

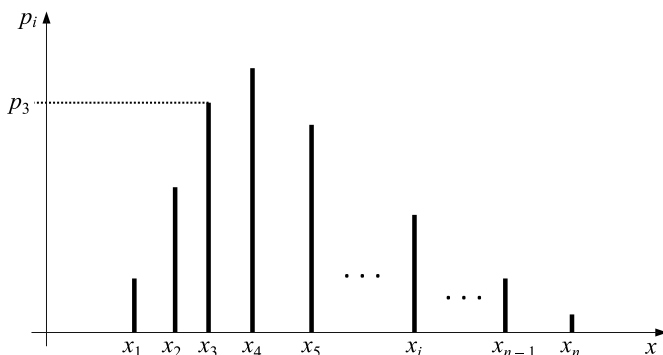
Drugą grupę stanowią **zmienne losowe skokowe** (dyskretne). Są to zmienne, które przyjmują tylko określone wartości z przeliczalnego lub skończonego

¹⁾ Symbole zmiennych losowych i zdarzeń losowych są w niniejszym opracowaniu wyróżniane pogrubioną czcionką.

zbioru. Za takie zmienne można traktować na przykład: liczbę studentów uzyskujących na egzaminie ocenę równą 5, liczbę wypadków, liczbę uszkodzeń, liczbę wadliwych elementów w pojemniku. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej skokowej jest opisywany przy użyciu funkcji $p(x_i)$ przypisującej wartość prawdopodobieństwa każdej z wartości x_i zmiennej x (rys. 1.3).



Rys. 1.2. Przykład gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej ciągłej x

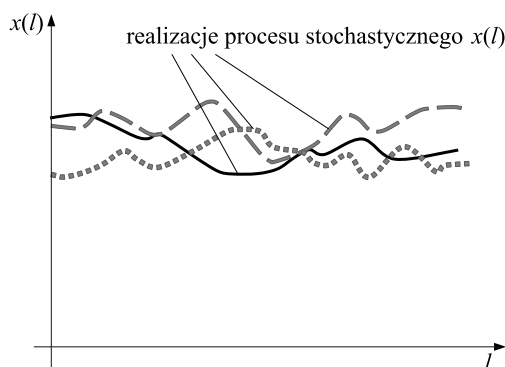


Rys. 1.3. Przykład rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej dyskretnej x

Zmiennym losowym ciągłym i dyskretnym poświęcone są rozdziały 2 i 3.

Zdarza się, że zmienna losowa jest zależna od pewnego nielosowego parametru (lub kilku parametrów). Przykładem może być wysokość chropowatości szlifowanej powierzchni elementu, mierzona wzdłuż jego długości. Wynik pomiaru jest przedstawiony w sposób poglądowy na rysunku 1.4. W wyniku pomiarów dokonanych na innych egzemplarzach tego samego elementu można uzyskać zbiór losowych przebiegów wysokości chropowatości, podobnych, lecz się niepokrywających. Taki zbiór wszystkich możliwych losowych przebiegów określonej wielkości jest nazywany **procesem stochastycznym**. Nielosowym parametrem t w większości przy-

padków praktycznych jest czas. Przykładem może być proces $x(t) \equiv \sigma(t)$ zmian w czasie naprężeń giętnych w określonym przekroju osi pojazdu.



Rys. 1.4. Wysokość chropowatości powierzchni elementu, mierzona wzdłuż jego długości l

Rodzaje procesów stochastycznych i ich ważniejsze cechy przedstawione są w dużym skrócie w rozdziale 6.

Uwaga: Większość obliczeń inżynierskich jest współcześnie dokonywana przy użyciu odpowiednich programów komputerowych. Łatwość wyznaczenia wartości złożonych formuł definiujących funkcje zmiennej losowej zmieniło sposób prowadzenia obliczeń probabilistycznych. Możliwość obliczenia wprost, na przykład dystrybucyjności lub gęstości prawdopodobieństwa, zastąpiło korzystanie z tablic wartości funkcji, zmieniając jednocześnie sposób rozwiązania. W niniejszym skrypcie rozwiązywanie prezentowanych przykładów jest ze względów dydaktycznych dokonywane przede wszystkim za pomocą metod tradycyjnych, tzn. przy wykorzystaniu tablic i kalkulatora. W odniesieniu do części przykładów są podane wskazówki, w celu ilustracji, w jaki sposób można do ich rozwiązania skorzystać z programu MS Excel – jednego z najbardziej rozpowszechnionych programów również wśród studentów uczelni technicznych. Autorzy zachęcają Czytelnika, aby najpierw prześledził rozwiązanie każdego przykładu, wykonane w sposób tradycyjny, a następnie sprawdził obliczenia, wykorzystując program komputerowy. Natomiast decyzję o wyborze metody rozwiązania każdego z zadań (czyli przykładów nierozwiązanych) autorzy zostawiają Czytelnikowi.

ZMIENNE LOSOWE CIĄGŁE I ICH FUNKCJE

2.1. PODSTAWOWE CECHY ZMIENNEJ LOSOWEJ CIĄGŁEJ

W wielu dziedzinach życia człowieka świadomość rozproszenia losowego wielkości opisujących cechy materii i wiedza o tym rozproszeniu są na tyle ważne, że próbuje się je określać i uwzględniać w analizach tych cech. W takich przypadkach drogą badań empirycznych określa się histogram cechy i na tej podstawie ustala się prawidłowości przebiegu histogramu, przypisując mu opis w postaci funkcji matematycznej. Może się to odbywać na przykład przy użyciu testów zgodności, opisywanych w piśmiennictwie z zakresu statystyki matematycznej [2–5]. Na użytek zagadnień inżynierskich wystarczająca jest zwykle dokładność jakościowej aproksymacji rozkładu empirycznego (czyli histogramu) rozkładem teoretycznym (hipotetycznym). Polega ona na jakościowym dopasowaniu kształtu jednego ze znanych rozkładów teoretycznych do uzyskanego wcześniej histogramu. Ważnym elementem ułatwiającym wybór rozkładu teoretycznego jest dodatkowa wiedza na temat badanej populacji. Koncepcja jakościowej aproksymacji histogramu (wzrostu studentów) odpowiednią krzywą ciągłą jest pokazana na rysunku 1.2.

Funkcja matematyczna opisująca krzywą, przedstawioną na rysunku 1.2 i charakterystyczną dla zmiennej losowej ciągłej, jest nazywana **gęstością prawdopodobieństwa** tej zmiennej. W odniesieniu do zmiennych losowych ciągłych x , z którymi zwykle ma do czynienia inżynier, można ją zdefiniować przy użyciu wyrażenia

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x < \mathbf{x} \leq x + \Delta x\}}{\Delta x}, \quad (2.1)$$

gdzie $P\{x < \mathbf{x} \leq x + \Delta x\}$ jest symbolem prawdopodobieństwa znalezienia się wartości zmiennej losowej x w przedziale $(x, x + \Delta x]$.

Przedział wartości, które może przybierać zmienna losowa ciągła x , oraz funkcja $f(x)$ gęstości prawdopodobieństwa tej zmiennej całkowicie określają jej **rozkład prawdopodobieństwa**. Do określenia rozkładu prawdopodobieństwa takiej

zmiennej zamiast gęstości prawdopodobieństwa stosuje się też, choć w praktyce inżynierskiej rzadziej, funkcję $Q(x)$ nazywaną **dystrybuantą** zmiennej losowej ciągłej. Jest ona definiowana zwykle przez wyrażenie

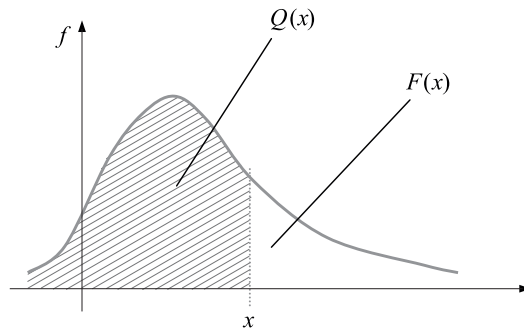
$$Q(x) = P\{\mathbf{x} \leq x\}, \quad (2.2)$$

gdzie $\mathbf{x} \leq x$ to zdarzenie losowe polegające na przyjęciu przez zmienną losową \mathbf{x} wartości nie większej niż x . Ze wzoru tego wynika związek między dystrybuantą a gęstością prawdopodobieństwa określony wzorem

$$Q(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du. \quad (2.3)$$

Związek ten w odniesieniu do zmiennej losowej ciągłej jest zilustrowany na rysunku 2.1. Dystrybuanta jest funkcją niemalejącą i przyjmującą wartości z przedziału zamkniętego $[0, 1]$. Jeśli gęstość $f(x)$ jest funkcją ciągłą w punkcie x , to zachodzi związek

$$f(x) = \frac{dQ(x)}{dx}. \quad (2.4)$$



Rys. 2.1. Ilustracja związku między dystrybuantą a gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej ciągłej

Każda funkcja $f(x)$ rzeczywista, nieujemna i spełniająca relację

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \quad (2.5)$$

jest gęstością prawdopodobieństwa zmiennej \mathbf{x} .

Prawdopodobieństwo $F(x) = P\{\mathbf{x} > x\}$ tego, że zmienna przyjmie wartość większą od x , wynosi

$$P\{\mathbf{x} > x\} = 1 - P\{\mathbf{x} \leq x\} = 1 - Q(x), \quad (2.6)$$

gdyż

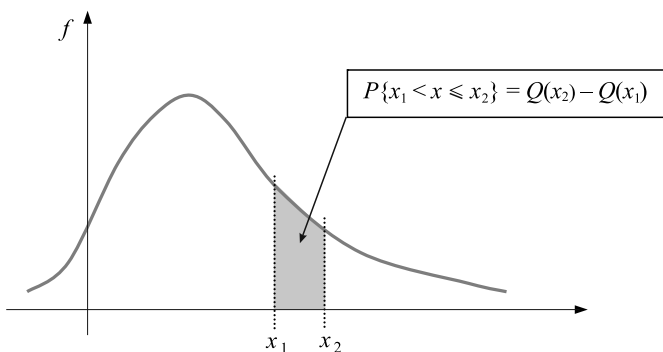
$$Q(x) + F(x) = 1. \quad (2.7)$$

Wynika to z faktu, że zdarzenie przyjęcia przez zmienną losową jakiegokolwiek wartości z przedziału jej występowania jest zdarzeniem pewnym.

Z wyrażeń (2.2) i (2.3) wynika, że prawdopodobieństwo przybrania przez zmienną losową ciągłą w rezultacie pojedynczego doświadczenia wartości z przedziału $(x_1, x_2]$ wynosi

$$P\{x_1 < x \leq x_2\} = Q(x_2) - Q(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx, \quad (2.8)$$

co zilustrowano na rysunku 2.2.



Rys. 2.2. Prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną losową ciągłą wartości z określonego przedziału

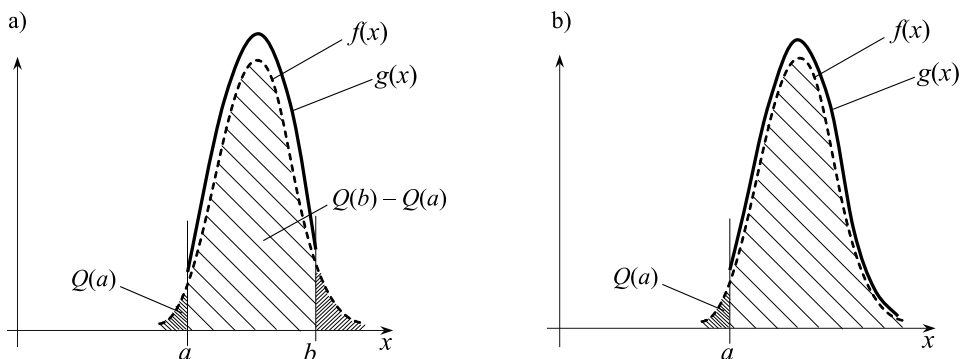
Wartość x , którą przybiera zmienna losowa x w rezultacie pojedynczego doświadczenia, jest niekiedy nazywana **realizacją zmiennej losowej**.

W zagadnieniach z dziedziny techniki często mamy do czynienia z rozkładami uciętymi. **Rozkład ucięty** obustronnie w punktach ucięcia a i b (rys. 2.3) jest opisywany przez gęstość prawdopodobieństwa o postaci

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{Q(b) - Q(a)} f(x) & \text{dla } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{dla } x < a \text{ i } x > b, \end{cases} \quad (2.9)$$

gdzie $f(x)$ i $Q(x)$ to odpowiednio – gęstość prawdopodobieństwa i dystrybuenta zmiennej x przed ucięciem.

Funkcja (2.9) opisuje na przykład rozkład prawdopodobieństwa wymiaru elementu, który jest ograniczony przez dolną i górną odchyłkę, a kontrola wymiaru jest stuprocentowa. Rozkład cechy może być ucięty jednostronnie, np. od dołu. Cechami, które mogą być opisywane rozkładem uciętym od dołu, są na przykład właściwości fizyczne materiałów konstrukcyjnych (granica plastyczności R_e , granica wytrzymałości R_m , granica zmęczenia Z i in.), cechy obiektów biologicznych (np. wzrost człowieka H) itd.



Rys. 2.3. Przykłady gęstości $g(x)$ rozkładów uciętych: a) obustronnie, b) jednostronnie, od dołu

Zbiór wartości, które może przybierać zmienna losowa, i jej rozkład prawdopodobieństwa w pełni określają zmienną losową. W praktyce często operuje się jedynie jej szczególnymi wartościami, które charakteryzują ją w przybliżeniu. Dużą grupę takich charakterystyk liczbowych stanowią tak zwane **momenty** zmiennej losowej. Najważniejszymi z nich są: moment zwykły rzędu pierwszego, nazywany **wartością oczekiwaną** i oznaczany symbolem Ex , oraz moment centralny rzędu drugiego, nazywany **wariancją** i oznaczany symbolem Vx (w niektórych pozycjach literatury stosowanym symbolem wariancji jest D^2x). Oba te momenty są względnie łatwo określane w praktyce w wyniku analizy zbioru zaobserwowanych realizacji zmiennej losowej (patrz rozdział 5).

Wartość oczekiwana jest związana z gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej, co wyraża ogólny wzór

$$Ex = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (2.10)$$

Ten parametr określa położenie środka grupowania realizacji zmiennej losowej. Im większa jego wartość, tym bardziej przesunięty jest rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej („masy prawdopodobieństwa”) w kierunku zwiększających się wartości x . Jest to przedstawione w sposób poglądowy na rysunku 2.4, przy czym użyto na nim często stosowanego symbolu wartości oczekiwanej $Ex \equiv m$. Statystycznym odpowiednikiem tego parametru jest wartość średnia (patrz rozdział 5).

Drugi z wymienionych momentów, tzn. wariancja, jest definiowany jako wartość oczekiwana kwadratu odchylenia zmiennej losowej x od jej wartości oczekiwanej m . Przedstawia to wyrażenie

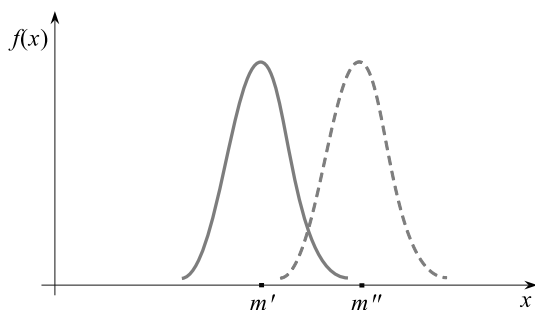
$$Vx = E(x - m)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x) dx. \quad (2.11)$$

Wariancja Vx charakteryzuje stopień rozproszenia wartości zmiennej losowej wokół jej wartości oczekiwanej. Częściej jednak jako bezpośrednią miarę takiego

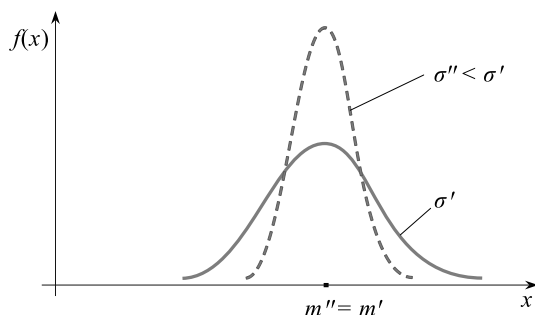
rozproszenia traktuje się **odchylenie standardowe** σ zmiennej losowej definiowane przez wzór

$$\sigma = \sqrt{Vx}. \quad (2.12)$$

Odchylenie standardowe ma ten sam wymiar co wartość zmiennej losowej. Wpływ odchylenia standardowego na kształt wykresu gęstości prawdopodobieństwa zmiennej jest zobrazowany na rysunku 2.5. Warto zauważyć, że na takiej ilustracji pole powierzchni pod każdą z krzywych jest jednakowe i równe 1. Wynika to z wyrażenia (2.5).



Rys. 2.4. Wpływ wartości oczekiwanej na położenie rozkładu zmiennej losowej



Rys. 2.5. Wpływ odchylenia standardowego na rozkład zmiennej losowej

Względne rozproszenie zmiennej losowej w stosunku do jej wartości oczekiwanej jest określane przez **współczynnik zmienności** β definiowany przy użyciu wzoru

$$\beta = \frac{\sigma}{m}. \quad (2.13)$$

Jest to wielkość bezwymiarowa. Na przykład wartość tego współczynnika w odniesieniu do granicy plastyczności R_e , traktowanej jako zmienna losowa, większości stali konstrukcyjnych wynosi $\beta = 0,05 - 0,08$ (w zależności od rodzaju stali i od hut).

W odniesieniu zwłaszcza do zmiennej losowej ciągłej używa się często pojęcia kwantyli. **Kwantylem rzędu α** , czyli odpowiadającym prawdopodobieństwu α , nazywa się taką wartość $x = x_\alpha$, dla której dystrybuanta wynosi α , tj.

$$Q(x_\alpha) = \alpha. \quad (2.14)$$

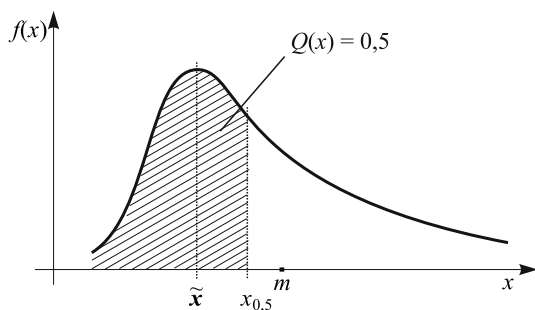
Kwantyl rzędu $\alpha = 0,5$ nazywa się **medianą** zmiennej losowej. Jest to zatem taka wielkość $x_{0,5}$, dla której spełniona jest równość

$$Q(x_{0,5}) = F(x_{0,5}) = 0,5, \quad (2.15)$$

co wynika z wyrażenia (2.7).

Inną szczególną cechą zmiennej losowej jest **moda** (nazywana też czasami dominantą). W przypadku zmiennej losowej ciągłej jest to jej wartość \tilde{x} , dla której gęstość prawdopodobieństwa osiąga maksimum.

Na poglądowym rysunku 2.6 jest przedstawione w odniesieniu do dowolnego rozkładu zmiennej wzajemne położenie mody, mediany i wartości oczekiwanej.



Rys. 2.6. Wzajemne położenie mody, mediany i wartości oczekiwanej

W następnych podrozdziałach są zaprezentowane w przykładach i zadaniach niektóre rodzaje rozkładów zmiennych losowych ciągłych, najczęściej stosowane w praktyce inżynierskiej. Są to rozkłady: normalny, logarytmiczno-normalny, Weibulla i wykładniczy. W literaturze dotyczącej rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej jest omawianych wiele innych rozkładów, które znajdują zastosowanie w odwzorowywaniu rozrzutów losowych cech różnych obiektów materialnych i niematerialnych. Są to na przykład rozkłady: równomierny, beta, gamma, chi-kwadrat, t Studenta, F Snedecora (ostatnie dwa są szczególnie przydatne przy opracowywaniu wyników badań eksperymentalnych i przy ich interpretowaniu).

W wielu zamieszczonych przykładach wyniki rozwiązań są prezentowane w formie graficznej, np. w postaci wykresu gęstości prawdopodobieństwa. Do sporządzania takich wykresów inżynier ma do dyspozycji różne komputerowe narzędzia graficzne, jednak w przedstawianych przykładach są one wykonywane

w sposób przybliżony i bez użycia tych narzędzi. Ten sposób graficznego przedstawiania rozwiązań przykładów może ułatwić w praktyce inżynierskiej właściwe interpretowanie wykresów uzyskiwanych przy użyciu narzędzi komputerowych. Oprócz takiego dydaktycznego powodu jest również merytoryczny powód sporządzania wykresów w prezentowanych przykładach bez użycia tych narzędzi.

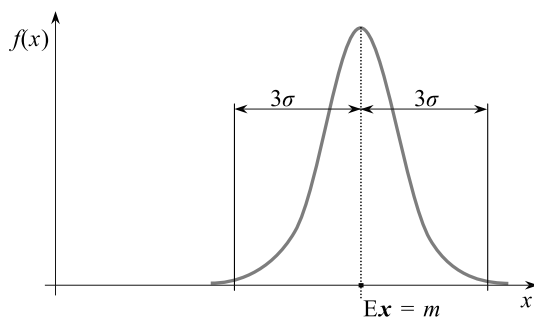
Warto bowiem zauważyć, że wszystkie obliczenia prowadzone przez inżyniera mają charakter szacunkowy, gdyż główne źródła niedokładności uzyskiwanych wyników tkwią nie w postaciach matematycznych modeli (np. obciążeń elementu samolotu), lecz we wprowadzanych danych, słabo znanych. Dotyczy to zwłaszcza obliczeń inżynierskich opartych na modelach probabilistycznych, w których argumenty rozkładów zmiennych losowych są zwykle znane z dokładnością nie większą niż kilkanaście, a nawet kilkadziesiąt procent. Z tych samych powodów dążenie przez inżyniera do obliczeń, na przykład naprężeń w przekroju elementu, z dużą dokładnością jest błędem logicznym. Podobnym błędem byłoby dbanie przez inżyniera o precyzyjne sporządzanie wykresu gęstości zmiennej losowej, która odwzorowuje jakąś cechę projektowanego urządzenia, w sytuacji, gdy na przykład dokładność oszacowania wartości oczekiwanej tej zmiennej wynosi 20%.

2.2. ROZKŁAD NORMALNY

Rozkładem normalnym albo rozkładem Gaussa jest nazywany rozkład zmiennej losowej ciągłej x określony przez funkcję gęstości prawdopodobieństwa o postaci

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.16)$$

przy czym: $-\infty < x < \infty$, a m i σ to wartość oczekiwana i odchylenie standardowe zmiennej x . Wykres tej funkcji jest przedstawiony na rysunku 2.7.



Rys. 2.7. Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej o rozkładzie normalnym

Z przebiegu tego wykresu wynika, że większość obserwacji (realizacji zmiennej) skupia się wokół wartości oczekiwanej (średniej), natomiast małe jest prawdopodobieństwo tego, iż zmienna losowa przyjmie wartość znacznie różniącą się od wartości oczekiwanej.

Rozkład normalny ma szczególne właściwości:

- jest symetryczny względem wartości oczekiwanej,
- wartość oczekiwana, mediana i moda są sobie równe, czyli

$$m = x_{0,5} = \tilde{x}, \quad (2.17)$$

- prawdopodobieństwo, iż zmienna losowa przybierze wartość leżącą w przedziale $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$, wynosi w przybliżeniu 0,997, a w praktyce przyjmuje się nierzadko jako równe 1.

Rozkład normalny ma duże znaczenie praktyczne, nie tylko w obszarze inżynierii. W rezultacie obserwacji różnych cech i zjawisk w przyrodzie oraz w technice okazało się, że wiele wielkości je opisujących ma rozkład zbliżony do normalnego. Taki wynik obserwacji jest zbieżny z rezultatem rozważań naukowych, mianowicie z **centralnym twierdzeniem granicznym**, zgodnie z którym suma niezależnych zmiennych losowych ma rozkład asymptotycznie normalny (patrz podrozdz. 2.6). Oznacza to, że wielkość o wartościach przypadkowych i będąca rezultatem sumowania się wpływu wielu różnych czynników przypadkowych, z których żaden nie jest dominujący, ma rozkład zbliżony do normalnego.

Jeśli zmienna losowa x ma rozkład normalny o dowolnych parametrach m i σ , to zmienna losowa

$$y = \frac{x - m}{\sigma} \quad (2.18)$$

też ma rozkład normalny, lecz o szczególnych wartościach parametrów, mianowicie $m = 0$ i $\sigma = 1$. Zmienna losowa y jest nazywana **standaryzowaną zmienną losową**, a jej rozkład – **standaryzowanym rozkładem normalnym** (rys. 2.8). Używana jest również nazwa – standardowy rozkład normalny. Gęstość prawdopodobieństwa takiej zmiennej jest określana przez wzór

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad (2.19)$$

a zgodnie ze wzorem (2.3) dystrybuanta zmiennej y wynosi

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (2.20)$$

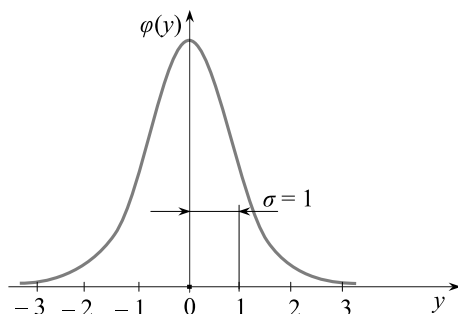
Związek między zmiennymi x i y wyrażają wzory (2.18) oraz

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi(y), \quad (2.21)$$

$$Q(x) = \Phi(y), \quad (2.22)$$

przy czym σ jest odchyleniem standardowym zmiennej x . Z powodu symetrii rozkładu y słuszne jest wyrażenie

$$\Phi(-y) = 1 - \Phi(y). \quad (2.23)$$



Rys. 2.8. Standaryzowany rozkład normalny

Dystrybuenta rozkładu normalnego nie jest całką elementarną, zatem jej obliczanie jest żmudne. Z tego powodu w praktyce obliczeń inżynierskich korzysta się z tablic wartości dystrybenty $\Phi(y)$, a także wartości gęstości $\varphi(y)$, zmiennej losowej standaryzowanej y , a następnie, korzystając z wyrażień (2.18), (2.21) i (2.22), określa się potrzebne cechy rozkładu zmiennej x . Wspomniane tablice są dostępne w wielu publikacjach w formie papierowej, a także w formie elektronicznej i w różnego rodzaju programach statystycznych. Warto zwrócić uwagę, że niektóre ze źródeł zamiast dystrybenty Φ standaryzowanego rozkładu normalnego, określonej przez wzór (2.20), podają w formie tablic wartości F funkcji Laplace'a, przy czym

$$F(y) = \Phi(y) - 0,5.$$

PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 2.1

Granica wytrzymałości doraźnej R_m pewnej stali stopowej sprężynowej ma rozkład w przybliżeniu normalny o parametrach: wartość oczekiwana

$ER_m = 1680$ MPa, wariancja $VR_m = (135 \text{ MPa})^2$. Po wyznaczeniu kilku wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej R_m narysować przybliżony przebieg wykresu tej funkcji.

Rozwiązanie

Zmienna R_m może przyjmować tylko wartości nieujemne, zatem jej rozkład jest ucięty od dołu przez wartość $R_m = 0$, a gęstość opisuje wyrażenie (2.9). Jednak ucięcie to nie ma praktycznie wpływu na rozkład prawdopodobieństwa, gdyż występujące w tym wyrażeniu dystrybuanty wynoszą: $Q(a) \equiv Q(R_m = 0) \approx 0$ i $Q(b) \equiv Q(R_m = \infty) = 1$. Dlatego przyjmujemy, że gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej R_m opisuje wzór (2.16). Zgodnie z nim

$$f(R_m) = \frac{1}{\sqrt{VR_m} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(R_m - ER_m)^2}{2VR_m}}. \quad (2.24)$$

Wartości tej funkcji potrzebne do narysowania jej wykresu wyznaczymy dla kilku charakterystycznych wartości R_m zmiennej R_m . Jedną z nich jest wartość oczekiwana zmiennej, czyli $R_m = ER_m$. Po podstawieniu jej do wyrażenia (2.24) otrzymujemy

$$f(R_m) = \frac{1}{\sqrt{VR_m} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(ER_m - ER_m)^2}{2VR_m}} = \frac{1}{\sqrt{VR_m} \sqrt{2\pi}} = \frac{1}{135\sqrt{2\pi}} = 29,6 \cdot 10^{-4} \text{ 1/MPa}.$$

Zauważmy, że jest to maksymalna wartość funkcji gęstości.

$$\text{Obliczmy teraz funkcję } f(R_m) \text{ dla wartości } R_m = ER_m \pm \sqrt{VR_m} = \begin{cases} 1815 \text{ MPa} \\ 1545 \text{ MPa} \end{cases}.$$

Dla obu tych wartości otrzymujemy jednakową wartość gęstości prawdopodobieństwa (wynika to z symetryczności przebiegu tej funkcji względem wartości oczekiwanej)

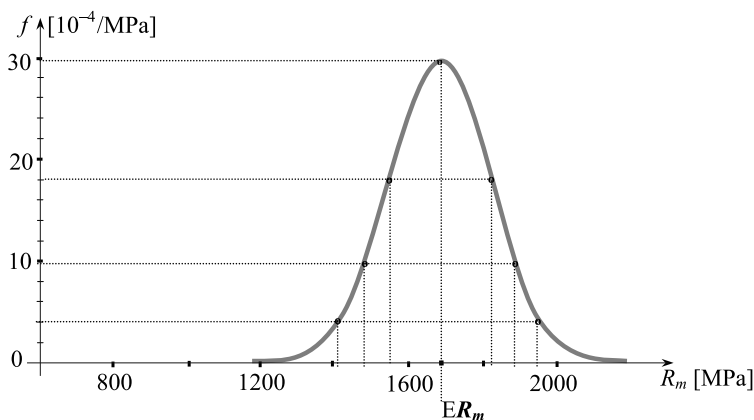
$$f(R_m) = \frac{1}{\sqrt{VR_m} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(ER_m \pm \sqrt{VR_m} - ER_m)^2}{2VR_m}} = \frac{1}{135\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} = 18,0 \cdot 10^{-4} \text{ 1/MPa}.$$

Wyznaczając w podobny sposób funkcję $f(R_m)$ dla innych wybranych wartości R_m , otrzymujemy:

$$\text{dla } R_m = ER_m \pm 1,5\sqrt{VR_m} = \begin{cases} 1882 \text{ MPa} \\ 1478 \text{ MPa} \end{cases} \quad f(R_m) = 9,7 \cdot 10^{-4} \text{ 1/MPa},$$

$$\text{dla } R_m = ER_m \pm 2\sqrt{VR_m} = \begin{cases} 1950 \text{ MPa} \\ 1410 \text{ MPa} \end{cases} \quad f(R_m) = 4,0 \cdot 10^{-4} \text{ 1/MPa}.$$

Uzyskane w ten sposób współrzędne kilku punktów umożliwiają sporządzenie wykresu przybliżonego przebiegu gęstości prawdopodobieństwa $f(R_m)$ zmiennej losowej R_m . Jest on przedstawiony na rysunku 2.9.



Rys. 2.9. Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej R_m

Uwaga: Wykorzystując program MS Excel, obliczamy wartości funkcji gęstości przy użyciu komendy ROZKŁAD.NORMALNY, która jest dostępna w zakładce Formuły → Więcej funkcji → Statystyczne. W celu wykonania obliczenia określamy:

- wartość $x \equiv R_m$ zmiennej losowej R_m , dla której chcemy dokonać obliczenia,
- średnią \equiv wartość oczekiwaną oraz odchylenie standardowe tej zmiennej,
- parametr logiczny, który określa, czy wynikiem ma być gęstość prawdopodobieństwa, czy dystrybuanta.

Ponieważ obliczana jest wartość gęstości prawdopodobieństwa, parametr logiczny definiujemy jako „Fałsz”. Po obliczeniu wartość funkcji gęstości w kilkunastu punktach przedziału $E R_m \pm n \sqrt{V R_m}$ (w praktyce wartości n są przyjmowane z przedziału $n \leq 3$) możemy narysować wykres funkcji, także w programie MS Excel.

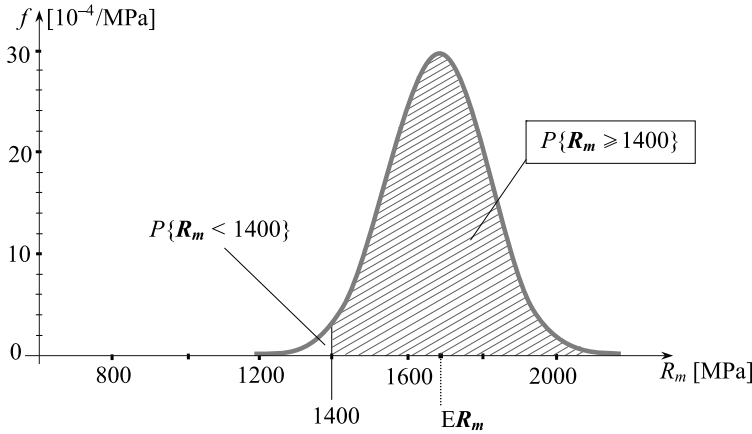
PRZYKŁAD 2.2

Granica wytrzymałości doraźnej R_m pewnej stali stopowej sprężynowej ma rozkład w przybliżeniu normalny o parametrach: wartość oczekiwana $E R_m = 1680$ MPa, wariancja $V R_m = (135 \text{ MPa})^2$. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że materiał pojedynczego płaskownika wykonanego z tej stali, losowo wybranego z pojemnika identycznych płaskowników, ma granicę wytrzymałości równą co najmniej $R_m = 1400$ MPa.

Rozwiązanie

Rozważana zmienna losowa R_m ma rozkład normalny ucięty przez wartość $R_m = 0$, jednak zgodnie z uzasadnieniem podanym w rozwiązaniu przykładu 2.1 wpływ tego ucięcia na rozkład zmiennej pomijamy. Zatem jej gęstość prawdopodobieństwa ma postać zilustrowaną na rysunku 2.9. Celem analizowanego przy-

kładu jest wyznaczenie prawdopodobieństwa $P\{R_m \geq 1400\}$, zilustrowanego na rysunku 2.10 w postaci odpowiedniego pola powierzchni pod krzywą gęstości.



Rys. 2.10. Ilustracja prawdopodobieństwa $P\{R_m \geq 1400\}$

Ponieważ zmienna losowa R_m jest ciągła, więc $P\{R_m \geq 1400\} = P\{R_m > 1400\}$. Zatem, zgodnie ze wzorem (2.6) poszukiwane prawdopodobieństwo można wyrazić w postaci

$$P\{R_m \geq 1400\} = 1 - P\{R_m \leq 1400\} = 1 - Q(1400), \quad (2.25)$$

gdzie $Q(1400)$ jest dystrybuantą zmiennej R_m , określaną dla jej wartości $R_m = 1400$. Dystrybuantę tę można wyznaczyć przy użyciu wyrażenia (2.3), przybierającego w tym przypadku postać

$$Q(1400) = \int_0^{1400} f(R_m) dR_m,$$

gdzie

$$f(R_m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(R_m - m)^2}{2\sigma^2}}$$

a $m = E R_m = 1680$ MPa, $\sigma = \sqrt{V R_m} = 135$ MPa. Jak już wcześniej wspomniano, byłoby to niełatwe matematycznie i żmudne. Dlatego do wyznaczenia dystrybuanty $Q(1400)$ lepiej użyć gotowych tablic wartości dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego zmiennej losowej y , której związek ze zmienną R_m zgodnie z wyrażeniem (2.18) ma postać

$$y = \frac{R_m - m}{\sigma}.$$

Ze wzoru (2.22) wynika, że poszukiwana dystrybuanta $Q(1400)$ może być wyznaczona przy użyciu wyrażenia

$$Q(1400) = \Phi\left(\frac{1400 - 1680}{135}\right) = \Phi(-2,07).$$

Z tablicy wartości dystrybuanty $\Phi(y)$ standaryzowanego rozkładu normalnego zamieszczonej na przykład w pozycji [3] i w Załączniku 1 można bezpośrednio odczytać wartość $\Phi(2,07) \approx 0,98$. Przy użyciu wyrażenia (2.23) wyznaczamy

$$\Phi(-2,07) = 1 - \Phi(2,07) = 0,02.$$

Zatem zgodnie z wyrażeniem (2.25) otrzymujemy

$$P\{R_m \geq 1400\} = 1 - Q(1400) = 1 - 0,02 = 0,98,$$

co było celem przykładu.

PRZYKŁAD 2.3

W serii jednakowych przekładni zębatych przewidziano zastosowanie wałków wykonanych z pewnej stali niestopowej ulepszonej cieplnie. Granica zmęczenia Z ze względu na zginanie obustronne tego materiału, traktowana jako zmienna losowa, ma rozrzuty losowe opisane w przybliżeniu przez rozkład normalny o współczynniku zmienności $\beta = 0,06$. Określona dla tej stali deterministyczna wartość granicy zmęczenia $Z = 250$ MPa jest wartością oczekiwaną zmiennej Z , oszacowaną w rezultacie badań zmęczeniowych próbek materiału. Zatem $EZ = 250$ MPa.

W jakim stopniu w obliczeniach wytrzymałościowych wspomnianych wałków należy zmniejszyć obliczeniową granicę zmęczenia stosowanej stali w stosunku do wartości $EZ = 250$ MPa, by pojedynczy egzemplarz wałka montowany w przekładni miał granicę zmęczenia większą od tej zmniejszonej jej wartości z prawdopodobieństwem $r = 0,95$?

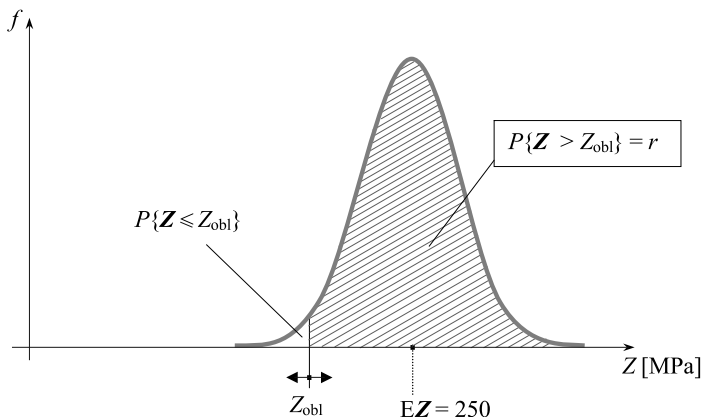
Rozwiązanie

Przyjmijmy, że miarą poszukiwanego stopnia obniżenia granicy zmęczenia wałka jest współczynnik c_r , stosowany w praktyce obliczeń zmęczeniowych, określony przez wyrażenie

$$c_r = \frac{Z_{obl}}{EZ}, \quad (2.26)$$

gdzie Z_{obl} jest granicą zmęczenia, która powinna być stosowana w tych obliczeniach, by wspomniane prawdopodobieństwo wynosiło $r = 0,95$. Nazwijmy wiel-

kość c_r , współczynnikiem niezawodności granicy zmęczenia materiału. Wielkości Z_{obl} i EZ są pokazane na rysunku 2.11. Wielkość Z_{obl} ma mniejszą wartość niż EZ , gdyż r jest większe od $P\{Z > EZ\}$, które wynosi 0,50. Do obliczenia współczynnika c_r przy użyciu wzoru (2.26) konieczne jest wcześniejsze wyznaczenie nieznannej wielkości Z_{obl} .



Rys. 2.11. Wartość oczekiwana i obliczeniowa granicy zmęczenia

Wartość oczekiwana EZ i współczynnik zmienności β całkowicie określają rozkład normalny zmiennej losowej Z . Położenie granicy zmęczenia Z_{obl} w stosunku do wartości oczekiwanej EZ ustalimy, korzystając z warunku

$$P\{Z > Z_{obl}\} = r, \quad (2.27)$$

wynikającego z wymagania sformułowanego w treści przykładu. Zgodnie ze wzorem (2.6) lewą stronę warunku (2.27) można wyrazić w postaci

$$P\{Z > Z_{obl}\} = 1 - P\{Z \leq Z_{obl}\} = 1 - Q(Z_{obl}), \quad (2.28)$$

gdzie $Q(Z_{obl})$ jest dystrybucją zmiennej Z , określaną dla wartości Z_{obl} . Warunkowi (2.27) można zatem nadać postać

$$Q(Z_{obl}) = 1 - r. \quad (2.29)$$

Tak jak w przykładzie 2.2, do obliczeń wykorzystamy tablice dystrybucji $\Phi(y)$ standaryzowanego rozkładu normalnego. W tym celu wprowadzamy nową zmienną losową, mianowicie

$$y = \frac{Z - EZ}{\sigma},$$

gdzie: $EZ = 250$ MPa, a odchylenie standardowe zmiennej Z wynosi $\sigma = \beta \cdot EZ = 0,06 \cdot 250 = 15$ MPa. Wartość zmiennej y odpowiadająca wartości Z_{obl} wynosi

$$y_{obl} = \frac{Z_{obl} - 250}{15}. \quad (2.30)$$

Ze wzoru (2.22) wynika, że $Q(Z_{obl}) = \Phi(y_{obl})$. Zatem warunek (2.29) przedstawmy w postaci

$$\Phi(y_{obl}) = 0,05. \quad (2.31)$$

We wspomnianych tablicach podawane są wartości funkcji $\Phi(y)$ tylko dla $y \geq 0$ (ze względu na symetrię rozkładu normalnego), a y_{obl} ma wartość ujemną (rys. 2.11). Aby móc odczytać z tych tablic wartość y_{obl} , korzystamy więc z relacji (2.23) i przekształcamy warunek (2.31) do postaci

$$1 - \Phi(-y_{obl}) = 0,05.$$

Stąd

$$\Phi(-y_{obl}) = 0,95.$$

Z tablicy zamieszczonej w Załączniku 1 odczytujemy wartość argumentu $(-y_{obl})$, dla której związek ten jest spełniony. Wynosi ona $(-y_{obl}) = 1,645$. Po podstawieniu do tego związku wyrażenia (2.30) otrzymujemy

$$-\frac{Z_{obl} - 250}{15} = 1,645$$

i w rezultacie

$$Z_{obl} = 250 - 15 \cdot 1,645 = 225 \text{ MPa}.$$

Wyznaczona wartość Z_{obl} jest przesunięta w stosunku do wartości oczekiwanej $EZ = 250$ MPa o 1,645 odchylenia standardowego σ zmiennej losowej Z . Po podstawieniu wartości Z_{obl} do wzoru (2.26) otrzymujemy

$$c_r = \frac{Z_{obl}}{EZ} = \frac{225}{250} = 0,90.$$

W ten sposób został osiągnięty cel przykładu. Jeśli więc w obliczeniach wytrzymałościowych wałka, wykonanego ze wspomnianej stali, inżynier zastosuje nie wartość $EZ = 250$ MPa (określaną jako charakterystyczna dla materiału), lecz wartość $Z_{obl} = c_r \cdot EZ = 225$ MPa, to może ufać, że losowo wybrany wałek ma granicę zmęczenia Z wynoszącą więcej niż 225 MPa, z prawdopodobieństwem $r = 0,95$.

Uwaga: Wykorzystując program MS Excel, wartość Z_{obl} obliczamy bezpośrednio z równania (2.29) przy użyciu komendy ROZKLAD.NORMALNY.ODW, która jest dostępna w zakładce Formuły → Więcej funkcji → Statystyczne. Wymagane jest podanie: wartości prawdopodobieństwa (w naszym przykładzie 0,05), wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego zmiennej losowej Z .

PRZYKŁAD 2.4

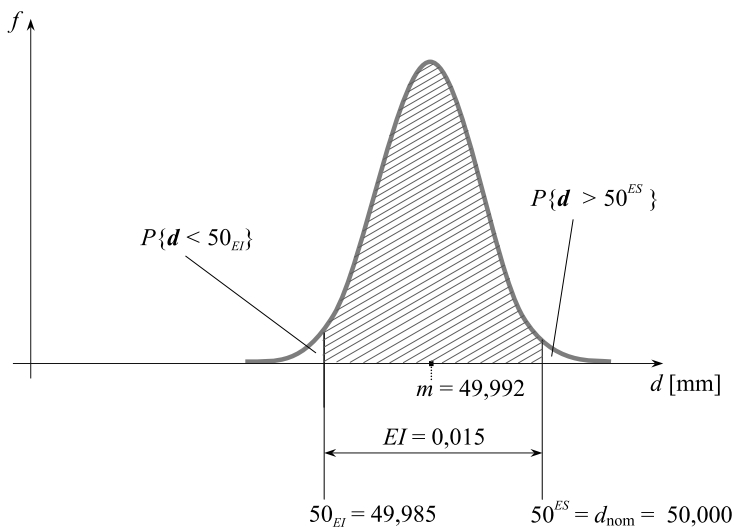
Na średnicę wewnętrzną $d = 50$ mm pierścienia wewnętrznego łożyska tocznego narzucone są odchyłki wymiarowe: dolna $EI^{(1)} = -15 \mu\text{m}$ i górna $ES^{(1)} = 0$. Zapewnienie wymiaru o takich cechach odbywa się na obrabiarce sterowanej numerycznie, przez odpowiednie ustawienie parametrów jej pracy.

W rezultacie kontroli wymiarów dokonywanej na dużej liczbie próbek statystycznej pierścieni stwierdzono, że rozrzut przypadkowy uzyskiwanego wymiaru d można opisać rozkładem normalnym o parametrach: wartość oczekiwana $m = 49,992$ mm, odchylenie standardowe $\sigma = 0,004$ mm.

Należy określić wadliwość pierścieni wytwarzanych przy tak ustawionych parametrach obrabiarki.

Rozwiązanie

Wadliwość w partii pierścieni wyznaczymy jako odsetek produkowanych pierścieni, których wymiar d nie mieści się w wymaganym polu tolerancji określonym przez odchyłki od wymiaru nominalnego podane w treści przykładu (rys. 2.12).



Rys. 2.12. Rozkład prawdopodobieństwa średnicy wewnętrznej d pierścienia łożyska tocznego oraz jej pole tolerancji

¹⁾ Symbole EI oraz ES są typowymi w inżynierii mechanicznej oznaczeniami odchyłek (litera E nie oznacza w tym przypadku wartości oczekiwanej).

Wadliwie wykonane pierścienie to te, których średnica wewnętrzna przekracza wymiar 50^{ES} lub jest mniejsza niż 50_{EI} . Wadliwość w może być wyznaczona jako suma prawdopodobieństw takich zdarzeń (patrz rozdz. 4), czyli

$$w = P\{d < 50_{EI}\} + P\{d > 50^{ES}\},$$

lub przy użyciu wyrażenia

$$w = 1 - P\{50_{EI} \leq d \leq 50^{ES}\}. \quad (2.32)$$

Ilustracją prawdopodobieństwa $P\{50_{EI} \leq d \leq 50^{ES}\}$ jest zaciemnione pole pod krzywą gęstości prawdopodobieństwa zmiennej d (rys. 2.12). Do wyznaczenia wadliwości w użyjemy wyrażenia (2.32). Prawdopodobieństwo $P\{50_{EI} \leq d \leq 50^{ES}\}$ obliczymy jako różnicę odpowiednich wartości dystrybuanty $Q(d)$ zmiennej d . Zatem

$$P\{50_{EI} \leq d \leq 50^{ES}\} = Q(50^{ES}) - Q(50_{EI}) = Q(50) - Q(49,985). \quad (2.33)$$

Do obliczeń obu wartości dystrybuanty $Q(d)$ wykorzystamy tablice dystrybuanty $\Phi(v)$ standaryzowanego rozkładu normalnego. Opierając się na wzorach (2.22) i (2.18), zapisujemy, że

$$Q(50) = \Phi\left(\frac{50,000 - 49,992}{0,004}\right) = \Phi(2,00).$$

Ze wspomnianych tablic odczytujemy, że $\Phi(2,00) = 0,977$. Zatem $Q(50) = 0,977$. Podobnie przekształcamy drugą dystrybuantę występującą w wyrażeniu (2.33), mianowicie $Q(49,985)$. Otrzymujemy

$$Q(49,985) = \Phi\left(\frac{49,985 - 49,992}{0,004}\right) = \Phi(-1,75).$$

Aby móc skorzystać z tablic, przy użyciu wyrażenia (2.23) dystrybuantę $\Phi(-1,75)$ sprowadzamy do postaci

$$\Phi(-1,75) = 1 - \Phi(1,75).$$

Stąd

$$Q(49,985) = 1 - 0,960 = 0,040.$$

Wyznaczone wartości dystrybuanty podstawiamy do relacji (2.33) i w rezultacie otrzymujemy

$$P\{50_{EI} \leq d \leq 50^{ES}\} = 0,977 - 0,040 = 0,937. \quad (2.34)$$

Możliwe jest już zatem wyznaczenie poszukiwanej wadliwości w w procesie produkcji wewnętrznych pierścieni łożysk. W tym celu podstawiamy otrzymaną war-

tość prawdopodobieństwa $P\{50_{EI} \leq d \leq 50^{ES}\}$ do wyrażenia (2.32) i w efekcie uzyskujemy wartość wadliwości

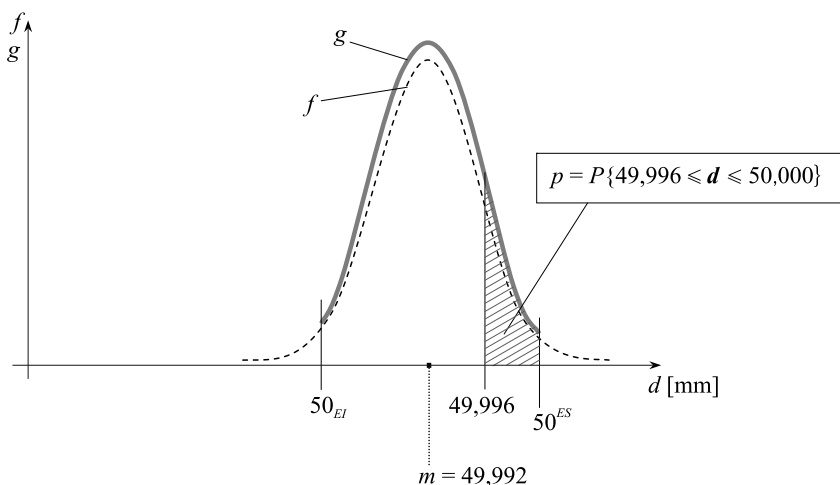
$$w - 0,937 = 0,063.$$

PRZYKŁAD 2.5

Analizowane w przykładzie 2.4 pierścienie wewnętrzne łożysk tocznych są produkowane masowo. Zakładając, że podlegają one stuprocentowej kontroli średnicy $d_{-0,015}^0$ otworu, należy określić odsetek tych pierścieni, których średnica d jest zawarta w górnym zakresie tolerancji, mianowicie w przedziale $49,996 \leq d \leq 50,000$ mm. Potrzebne informacje i dane zaczerpnąć z przykładu 2.4.

Rozwiązanie

Poszukiwany odsetek pierścieni o średnicy mieszczącej się w podanym przedziale wartości jest równy prawdopodobieństwu p tego, że średnica pojedynczego egzemplarza pierścienia, losowo wybranego spośród pierścieni zakwalifikowanych jako wykonanych poprawnie, mieści się w tym przedziale. Przyjmijmy, że po stuprocentowej kontroli średnica d jest zmienną losową o rozkładzie normalnym uciętym na krańcach pola tolerancji, czyli w punktach: $d = 50_{EI}$ i $d = 50^{ES}$, gdzie EI oraz ES to odchyłki dolna i górna od wymiaru nominalnego $d = 50$ mm (rys. 2.13).



Rys. 2.13. Gęstość prawdopodobieństwa średnicy wewnętrznej d pierścienia łożyska tocznego przed kontrolą (f) i po niej (g)

Korzystając z wyrażenia (2.8), poszukiwane prawdopodobieństwo $p = P\{49,996 \leq d \leq 50,000\}$ można przedstawić w postaci

$$p = \int_{49,996}^{50,000} g(d) dd, \quad (2.35)$$

gdzie $g(d)$ jest gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej d o rozkładzie normalnym uciętym obustronnie na krańcach pola tolerancji średnicy d . Zgodnie z relacją (2.9), gęstość

$$g(d) = \begin{cases} \frac{1}{Q(50,000) - Q(49,985)} f(d) & \text{dla } 49,996 \leq d \leq 50,000, \\ 0 & \text{dla pozostałych wartości } d, \end{cases} \quad (2.36)$$

przy czym $Q(50,000)$ i $Q(49,985)$ to wartości dystrybuanty zmiennej losowej d o rozkładzie normalnym nieuciętym (ucięcie w zerze praktycznie nie ma znaczenia) o gęstości $f(d)$, określone na wspomnianych krańcach pola tolerancji.

Po podstawieniu relacji (2.36) do wyrażenia (2.35) otrzymujemy

$$p = \frac{1}{Q(50,000) - Q(49,985)} \int_{49,996}^{50,000} f(d) dd = \frac{Q(50,000) - Q(49,996)}{Q(50,000) - Q(49,985)}, \quad (2.37)$$

gdzie $Q(49,996)$ dystrybuantą tego samego rozkładu nieuciętego. Wartości dystrybuanty $Q(50,000) = 0,977$ i $Q(49,985) = 0,040$ są wyznaczone w przykładzie 2.4. Dystrybuantę $Q(49,996)$ znajdujemy w podobny sposób. Wynosi ona

$$Q(49,996) = \Phi\left(\frac{49,996 - 49,992}{0,004}\right) = \Phi(1,00) = 0,841.$$

Po podstawieniu danych do wyrażenia (2.37) uzyskujemy

$$p = \frac{0,977 - 0,841}{0,977 - 0,040} = 0,15.$$

Zatem odsetek tych pierścieni, których średnica d jest zawarta w przedziale wartości $49,996 \leq d \leq 50,000$ mm, wynosi $p = 0,15 = 15\%$.

PRZYKŁAD 2.6

Pewien wysokościomierz poddany został badaniom dokładności jego wskazań. Okazało się, że przyrząd nie robi błędów systematycznych, a losowe błędy h [m] wskazań wysokości mają rozkład normalny. Stwierdzono również, że 90% wskazań przyrządu nie wykazuje większych błędów niż ± 10 m.

Należy wyznaczyć odchylenie standardowe błędu wskazań przyrządu.

Rozwiązanie

Z podanych informacji wynika, że

$$P\{|h| \leq 10\} = 0,90 \quad (2.38)$$

i ten warunek wykorzystamy do wyznaczenia odchylenia standardowego zmiennej losowej h .

W tym celu przy użyciu wyrażeń (2.8) oraz (2.22) i (2.18) przekształcamy lewą stronę tego warunku do postaci

$$P\{|h| \leq 10\} = P\{-10 \leq h \leq 10\} = \Phi\left(\frac{10 - Eh}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-10 - Eh}{\sigma}\right).$$

Zauważmy, że $Eh = 0$, ponieważ przyrząd nie wykazuje błędów systematycznych. Zatem

$$P\{|h| \leq 10\} = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-10}{\sigma}\right).$$

Opierając się na relacji (2.23), dokonujemy przekształcenia

$$\Phi\left(\frac{-10}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right).$$

W rezultacie warunek (2.38) przybiera postać

$$2\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - 1 = 0,90.$$

Stąd

$$\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0,95. \quad (2.39)$$

Ta postać warunku posłuży nam do wyznaczenia poszukiwanej wartości odchylenia standardowego σ . Z tablicy dystrybucyj $\Phi(y)$ standaryzowanego rozkładu normalnego (Załącznik 1) odczytujemy wartość argumentu $\left(\frac{10}{\sigma}\right)$, dla której związek ten jest spełniony. Wynosi ona

$$\frac{10}{\sigma} = 1,65.$$

Poszukiwane odchylenie standardowe błędów wskazań wysokościomierza wynosi więc

$$\sigma = 6 \text{ m.}$$

Uwaga: Korzystając z programu MS Excel, możemy zamiast odczytywać wartość argumentu $\left(\frac{10}{\sigma}\right)$ z tablic standardowego rozkładu normalnego, obliczyć ją, korzystając z funkcji ROZKŁAD.NORMALNY.S.ODW.

2.3. ROZKŁAD LOGARYTMICZNO-NORMALNY

W różnych zagadnieniach z obszaru techniki, ekonomii, niezawodności i innych ważne znaczenie ma rozkład logarytmiczno-normalny (jest też używana nazwa logarytmo-normalny). Zmienna losowa x o wartościach dodatnich ma taki rozkład, jeśli jej logarytm ma rozkład normalny. W praktyce jest to zazwyczaj logarytm naturalny, jednak ogólnie podstawa logarytmu może być dowolna. W niniejszym opracowaniu przyjęto, że podstawa tego logarytmu wynosi 10. Wielkość

$$z = \log x \quad (2.40)$$

jako funkcja zmiennej losowej jest także zmienną losową (podrozdz. 2.6). Jeśli zatem zmienna z ma rozkład normalny, to zmienna x ma rozkład logarytmiczno-normalny, a jej gęstość prawdopodobieństwa jest opisana przez funkcję

$$f(x) = \frac{\log e}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.41)$$

przy czym: $x > 0$, a m i σ to wartość oczekiwana i odchylenie standardowe zmiennej losowej $z = \log x$. Postać wykresu tej funkcji zależy głównie od wartości parametru σ (rys. 2.14). Niektóre z właściwości rozkładu logarytmiczno-normalnego są następujące:

- jest niesymetryczny względem wartości oczekiwanej, przy czym asymetria jest tym większa, im większe jest odchylenie standardowe σ ,
- moda, mediana i wartość oczekiwana spełniają relacje

$$\tilde{x} < x_{0,5} < Ex, \quad (2.42)$$

- moda i mediana wynoszą (patrz przykład 2.7)

$$\tilde{x} = 10^{m - \sigma^2 \ln 10}, \quad (2.43)$$

$$x_{0,5} = 10^m, \quad (2.44)$$

- wartość oczekiwana (patrz przykład 2.8)

$$Ex = 10^{m + 0,5\sigma^2 \ln 10}. \quad (2.45)$$

Funkcja $\log x$ jest funkcją rosnącą, prawdziwe jest więc wyrażenie

$$P\{x \leq x\} = P\{\log x \leq \log x\}. \quad (2.46)$$

Związek ten oznacza równość dystrybuant $Q(x)$ i $F(z)$ zmiennych x oraz $z = \log x$, czyli

$$Q(x) = F(z). \quad (2.47)$$

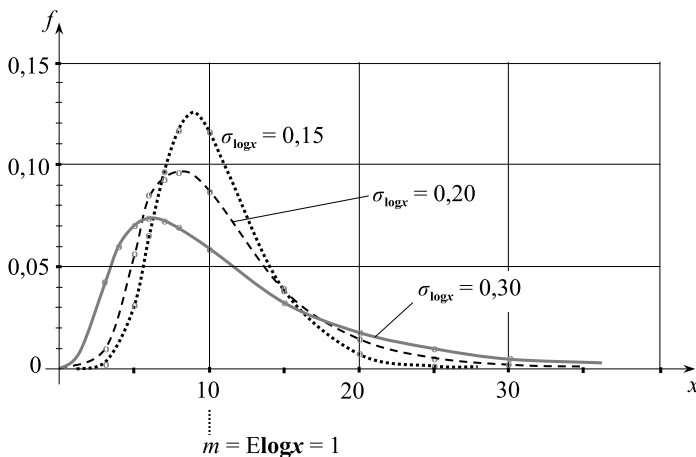
Przy wyznaczaniu dystrybuanty $Q(x)$ zmiennej x o rozkładzie logarytmiczno-normalnym można więc wykorzystywać właściwości rozkładu normalnego zmiennej losowej z po jej standaryzacji do postaci

$$y = \frac{\log x - m}{\sigma}, \quad (2.48)$$

gdzie m i σ to odpowiednie parametry zmiennej z . Zatem na podstawie relacji (2.22) i (2.47) otrzymujemy

$$Q(x) = \Phi\left(\frac{\log x - m}{\sigma}\right). \quad (2.49)$$

To stwierdzenie ułatwia w praktyce obliczenia dystrybuanty $Q(x)$ zmiennej losowej o rozkładzie logarytmiczno-normalnym, gdyż umożliwia korzystanie z tabel wartości dystrybuanty $\Phi(y)$ standaryzowanej zmiennej losowej o rozkładzie normalnym.



Rys. 2.14. Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej x o rozkładzie logarytmiczno-normalnym i parametrze $m = E \log x = 1$ oraz różnych wartościach parametru $\sigma_{\log x} \equiv \sigma$

PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 2.7

Na podstawie danych statystycznych o czasie T trwania akcji ratowniczej prowadzonej przez straż pożarną, zebranych z trzech lat dla jednego z dużych miast polskich, stwierdzono, że wielkość ta ma rozkład logarytmiczno-normalny, a pa-

rametry zmiennej $\log T$ wynoszą: $m = E \log T = -0,20$, $\sigma = 0,25$, przy czym T było określone w godzinach. Należy:

- 1) wyznaczyć modę i medianę tej zmiennej,
- 2) sporządzić przybliżony przebieg wykresu gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej T .

Rozwiązanie

Ad 1) Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej T wynosi

$$f(T) = \frac{\log e}{\sigma T \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log T - m)^2}{2\sigma^2}} \quad 1/h. \quad (2.50)$$

Moda tej zmiennej jest to jej wartość \tilde{T} , dla której gęstość prawdopodobieństwa $f(T)$ osiąga maksimum. Tę szczególną wartość znajdziemy, przyrównując pochodną funkcji $f(T)$ do zera i znajdując rozwiązanie równania

$$f'(\tilde{T}) = 0. \quad (2.51)$$

Korzystając z zasad analizy matematycznej, wyznaczamy lewą stronę tej równości. Wynosi ona

$$f'(T) = -\frac{\log e}{\sigma \sqrt{2\pi}} \frac{1}{T^2} e^{-\frac{(\log T - m)^2}{2\sigma^2}} \left(1 + \frac{\log T - m}{\sigma^2 \ln 10} \right).$$

Po podstawieniu tego wzoru do wyrażenia (2.51) zauważamy, że moda \tilde{T} wynika z równania

$$1 + \frac{\log \tilde{T} - m}{\sigma^2 \ln 10} = 0.$$

Stąd

$$\tilde{T} = 10^{m - \sigma^2 \ln 10}. \quad (2.52)$$

W rezultacie podstawienia danych otrzymujemy

$$\tilde{T} = 10^{-0,20 - 0,25^2 \ln 10} = 0,453 \text{ h} = 27,2'.$$

Medianę zmiennej T wyznaczmy, opierając się na definicji tej wielkości (2.15) i rozwiązując równanie

$$Q(T_{0,5}) = 0,5, \quad (2.53)$$

gdzie $Q(T_{0,5})$ jest dystrybuantą zmiennej określoną dla wartości $T_{0,5}$. Dystrybuantę tę wyznaczmy, korzystając z wyrażenia (2.49) i z odpowiednich tablic dys-

trybuanty standaryzowanej zmiennej losowej o rozkładzie normalnym. W tym przypadku wyrażenie to ma postać

$$Q(T_{0,5}) = \Phi\left(\frac{\log T_{0,5} - m}{\sigma}\right).$$

Stąd

$$\Phi\left(\frac{\log T_{0,5} - m}{\sigma}\right) = 0,5. \quad (2.54)$$

Wartość prawej strony wskazuje, że nie ma potrzeby korzystania ze wspomnianych tablic, gdyż wartość standaryzowanej zmiennej losowej

$$y = \frac{\log T_{0,5} - m}{\sigma},$$

spełniającej równanie (2.54), jest oczywista (rys. 2.15) i wynosi zero. Zatem

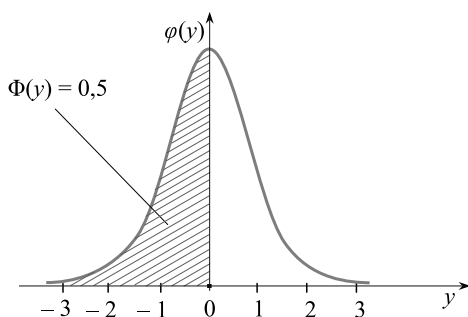
$$\frac{\log T_{0,5} - m}{\sigma} = 0,$$

czyli $\log T_{0,5} = m$. Stąd poszukiwana mediana

$$\log T_{0,5} = 10^m. \quad (2.55)$$

Zatem

$$T_{0,5} = 10^{-0,20} = 0,631 \text{ h} = 37,9'.$$



Rys. 2.15. Rozkład normalny standaryzowanej zmiennej losowej

Na podstawie uzyskanych wyników obliczeń stwierdzamy, że: po pierwsze – najbardziej prawdopodobny czas trwania akcji ratowniczej wynosi $\tilde{T} = 27,2$ minut, po drugie – z prawdopodobieństwem 50% czas ten jest dłuższy niż $T_{0,5} = 37,9$ minut.

Przy okazji warto zauważyć, że wyprowadzone w tym przykładzie wzory (2.52) i (2.55) są słuszne w odniesieniu do każdej zmiennej losowej o rozkładzie logarytmiczno-normalnym.

Ad 2) Przybliżony przebieg wykresu funkcji gęstości prawdopodobieństwa czasu T trwania akcji ratowniczej można sporządzić w rezultacie jej obliczenia dla kilku wybranych wartości zmiennej T . Jedną z nich niech będzie wartość T wynikająca z równości $\log T = m$. Stąd $T = 10^m = 10^{-0,20} = 0,631 \text{ h} = 37,9 \text{ min}$. Dla tej wartości T gęstość zmiennej T wynosi

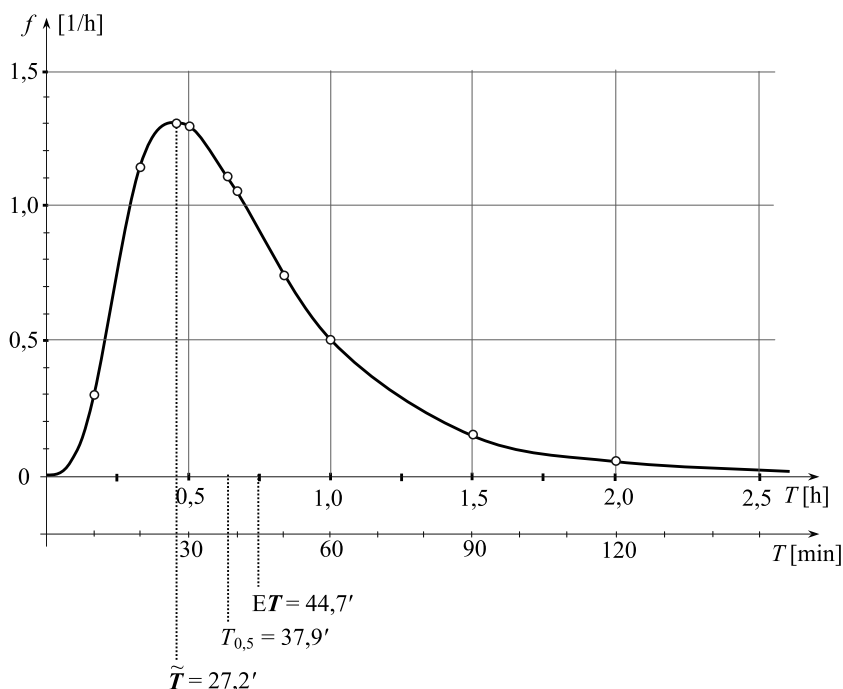
$$f(0,631) = \frac{\log e}{\sigma T \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{\log e}{0,25 \cdot 0,631 \sqrt{2\pi}} \cdot 1 = 1,10 \text{ 1/h} \quad (2.56)$$

W podobny sposób wyznaczamy gęstość dla innych wybranych wartości T (tab. 2.1).

Tabela 2.1. Wyniki obliczeń gęstości prawdopodobieństwa

T [min]	10	20	30	37,9	40	50	60	90	120
T [h]	0,17	0,33	0,50	0,631	0,67	0,83	1,00	1,50	2,00
$f(T)$ [1/h]	0,29	1,13	1,28	1,10	1,04	0,73	0,50	0,15	0,05

Wyniki obliczeń umożliwiły sporządzenie wykresu (rys. 2.16), co było celem tej części rozwiązania przykładu. Na rysunku zaznaczono także położenie wartości oczekiwanej zmiennej T , uzyskanej w rezultacie rozwiązania przykładu 2.8.



Rys. 2.16. Gęstość prawdopodobieństwa czasu T trwania akcji ratowniczej

Uwaga: Wykorzystując program MS Excel, wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa obliczamy (w punkcie 2 rozwiązania) przy użyciu komendy ROZKŁAD.LOG. Wymagane jest określenie:

- wartości $x \equiv T$ zmiennej losowej T , dla której chcemy dokonać obliczenia,
- wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego zmiennej losowej $\ln T = \ln 10 \cdot \log T$,
- parametru logicznego, który określa, czy wynikiem obliczenia ma być gęstość prawdopodobieństwa, czy dystrybuanta.

W programie MS Excel rozkład logarytmiczno-normalny określono dla zmiennej losowej $\ln T$. Dlatego należy podać wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe tej zmiennej losowej, obliczając je przy użyciu zależności $\ln T = \ln 10 \cdot \log T$. Parametr logiczny definiujemy jako „Fałsz”, ponieważ w przykładzie obliczana jest wartość gęstości prawdopodobieństwa.

PRZYKŁAD 2.8

Analizowany w przykładzie 2.7 czas T trwania akcji ratowniczej ma rozkład logarytmiczno-normalny, a parametry zmiennej $\log T$ wynoszą: $m = E \log T = -0,20$, $\sigma = 0,25$, przy czym T było określane w godzinach.

Należy wyznaczyć wartość oczekiwaną czasu trwania akcji ratowniczej.

Rozwiązanie

Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej T jest opisana przez funkcję (2.50). Zgodnie z wyrażeniem (2.10) wartość oczekiwana tej zmiennej losowej

$$ET = \int_0^{\infty} T f(T) dT = \frac{\log e}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(\log T - m)^2}{2\sigma^2}} dT. \quad (2.57)$$

W celu ułatwienia wyznaczania tej wielkości dokonujemy podstawienia nowej zmiennej

$$u = \frac{\log T - m}{\sigma}. \quad (2.58)$$

Aby uzależnić dT od zmiennej u , przekształcamy wyrażenie (2.58) do postaci

$$T = 10^{\sigma u + m}. \quad (2.59)$$

Stosując podstawienie $10 = e^{\frac{1}{\log e}}$, nadajemy wyrażeniu (2.59) postać

$$T = e^{\frac{m}{\log e}} \cdot e^{\frac{\sigma}{\log e} u}.$$

Stąd

$$dT = \frac{\sigma}{\log e} e^{\frac{m}{\log e}} \cdot e^{\frac{\sigma}{\log e} u} du. \quad (2.60)$$

Po podstawieniu wyrażeń (2.58) i (2.60) do wzoru (2.57) otrzymujemy po przekształceniach (należy zauważyć, że ze względu na podstawienie (2.58) zmieniają się granice całkowania)

$$ET = e^{\frac{1}{\log e} \left(m + \frac{0,5\sigma^2}{\log e} \right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(u - \frac{\sigma}{\log e} \right)^2} du.$$

Po wprowadzeniu zmiennej $z = u - \frac{\sigma}{\log e}$ wyrażenie to przybiera postać

$$ET = e^{\frac{1}{\log e} \left(m + \frac{0,5\sigma^2}{\log e} \right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz.$$

Łatwo dostrzec, że

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz = 1,$$

gdyż lewa strona tej równości jest całką gęstości prawdopodobieństwa standaryzowanego rozkładu normalnego zmiennej losowej \mathbf{z} w pełnym przedziale jej wartości. Zatem

$$ET = e^{\frac{1}{\log e} \left(m + \frac{0,5\sigma^2}{\log e} \right)}.$$

Wzorowi temu można nadać także inną formę, jeśli zauważymy, że $\frac{1}{\log e} = \ln 10$ i $10 = e^{\frac{1}{\log e}}$. Wówczas

$$ET = 10^{m+0,5\sigma^2 \ln 10}. \quad (2.61)$$

Wprowadzone wzory umożliwiające obliczanie ET są słuszne w odniesieniu do każdej zmiennej losowej o rozkładzie logarytmiczno-normalnym.

Do wyznaczenia wartości oczekiwanej czasu trwania akcji ratowniczej zastosujemy wzór (2.61)

$$ET = 10^{-0,20+0,5 \cdot 0,25^2 \ln 10} = 0,745 \text{ h} \approx 44,7'.$$

PRZYKŁAD 2.9

Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że akcja ratownicza, o której mowa w przykładach 2.7 i 2.8, może trwać dłużej niż 1 godzinę. Przyjąć, jak we wspomnianych przykładach, że czas T [h] trwania akcji ratowniczej ma rozkład logarytmiczno-normalny o parametrach: $m = E \log T = -0,20$, $\sigma = 0,25$.

Rozwiązanie

Zgodnie z relacją (2.6) poszukiwane prawdopodobieństwo

$$P\{T > 1\} = 1 - P\{T \leq 1\} = 1 - Q(1), \quad (2.62)$$

gdzie $Q(1)$ jest dystrybuantą zmiennej losowej T określoną dla wartości $T = 1$. Dystrybuantę tę obliczymy, korzystając z jej związku, określonego przez wzór (2.49), z dystrybuantą $\Phi(y)$ standaryzowanej zmiennej losowej o rozkładzie normalnym. W tym przypadku przybiera on postać

$$Q(1) = \Phi\left(\frac{\log 1 - m}{\sigma}\right). \quad (2.63)$$

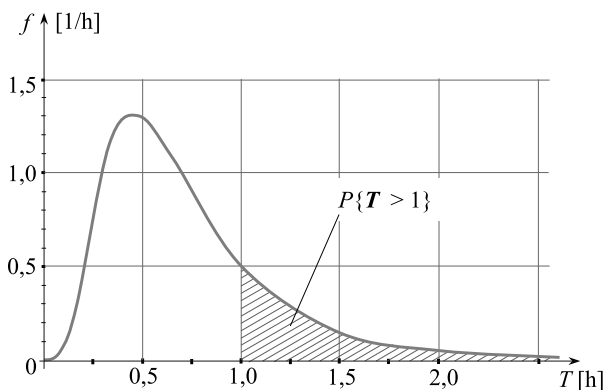
Po podstawieniu danych otrzymujemy

$$Q(1) = \Phi\left(\frac{\log 1 + 0,20}{0,25}\right) = \Phi(0,8).$$

Z odpowiednich tablic funkcji Φ odczytujemy, że $\Phi(0,8) = 0,788$ (Załącznik 1). W rezultacie podstawienia tej wartości do wyrażenia (2.62) otrzymujemy

$$P\{T > 1\} = 1 - 0,788 = 0,212.$$

Zatem, prawdopodobieństwo tego, że akcja ratownicza będzie trwała dłużej niż 1 godzinę wynosi nieco ponad 21%. Ilustracją tego prawdopodobieństwa jest zaciemnione pole pod wykresem gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej T (rys. 2.17), sporządzonym na podstawie rysunku 2.16.



Rys. 2.17. Ilustracja prawdopodobieństwa $P\{T > 1\}$

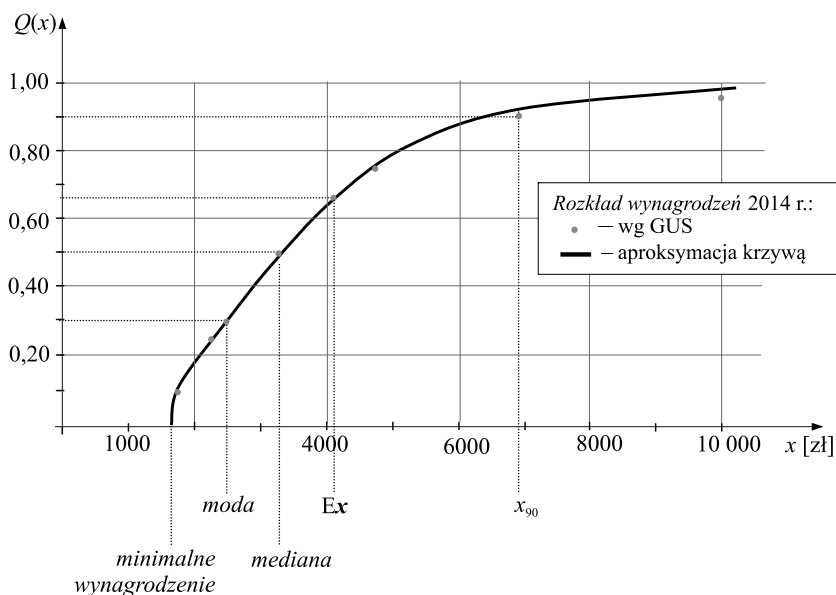
Uwaga: Korzystając z programu MS Excel, wartość dystrybuanty $Q(1)$ w równaniu (2.62) obliczamy przy użyciu komendy ROZKŁAD.LOG. Zauważmy (podobnie jak w uwadze do przykładu 2.7), że w programie MS Excel rozkład logarytmiczno-normalny jest określony dla zmiennej losowej $\ln T$. Dlatego należy podać wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe tej zmiennej losowej, obliczając je przy użyciu zależności $\ln T = \ln 10 \cdot \log T$. Parametr logiczny definiujemy jako „Prawda”, gdyż obliczana jest wartość dystrybuanty.

Aby uniknąć przeliczania wartości oczekiwanej oraz odchylenia standardowego, możemy obliczyć $Q(1)$, korzystając z komendy ROZKŁAD.NORMALNY.S i z równania (2.63).

PRZYKŁAD 2.10

Z danych przedstawionych przez Główny Urząd Statystyczny wynika, że w 2014 roku struktura wynagrodzeń w sektorze przedsiębiorstw zatrudniających powyżej 9 osób może być opisana w przybliżeniu przez rozkład prawdopodobieństwa logarytmiczno-normalny zmiennej losowej x [zł], uciętym lewostronnie w punkcie $a = \text{płaca minimalna}$. Parametry zmiennej **log x** wynosiły: $m = E \log x = 3,517$, $\sigma = 0,22$, a płaca minimalna była równa 1680 zł. Wykres dystrybuanty $Q(x)$ zmiennej x , właściwy dla 2014 roku, jest przedstawiony na rysunku 2.18.

Po wyznaczeniu kilku wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa $g(x)$ zmiennej losowej x narysować przybliżony przebieg wykresu tej funkcji.



Rys. 2.18. Dystrybuanta wynagrodzeń w sektorze przedsiębiorstw zatrudniających powyżej 9 osób

Rozwiązanie

Zauważmy, że rozkład zmiennej x jest rozkładem uciętym w punkcie $x = a$. Zatem dystrybuancie $Q(x)$ przedstawionej na rysunku 2.18 odpowiada, zgodnie ze wzorem (2.9), gęstość prawdopodobieństwa $g(x)$ wynosząca

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 - Q(a)} f(x) & \text{dla } x \geq a, \\ 0 & \text{dla } x < a, \end{cases} \quad (2.64)$$

gdzie: $f(x)$ – gęstość prawdopodobieństwa zmiennej x przed ucięciem, $Q(a)$ – dystrybuanta takiej zmiennej w punkcie a .

Gęstość prawdopodobieństwa $f(x)$ jest opisana przez funkcję (2.41), czyli

$$f(x) = \frac{\log e}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.65)$$

a dystrybuanta $Q(a)$ może być wyznaczona przy użyciu wyrażenia (2.49), określającego jej związek z dystrybuantą $\Phi(y)$ standaryzowanej zmiennej losowej $y = \frac{\log x - m}{\sigma}$ o rozkładzie normalnym. W tym przypadku przybiera on postać

$$Q(a) = \Phi\left(\frac{\log a - m}{\sigma}\right).$$

Po podstawieniu danych oraz skorzystaniu z relacji (2.23) i tablic standaryzowanego rozkładu normalnego otrzymujemy

$$Q(a) = \Phi\left(\frac{\log 1680 - 3,517}{0,22}\right) = \Phi(-1,3259) = 1 - \Phi(1,3259) = 0,093.$$

W rezultacie podstawienia tej wartości oraz wzoru (2.65) do wyrażenia (2.64) uzyskuje ono postać

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{0,907} f(x) & \text{dla } x \geq a, \\ 0 & \text{dla } x < a. \end{cases} \quad (2.66)$$

Zatem dla zakresu wartości x , w którym gęstość $g(x) > 0$, gęstość ta może być wyznaczana na podstawie wzoru

$$g(x) = \frac{1}{0,907} \frac{\log e}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.67)$$

Przybliżony przebieg wykresu tej funkcji można sporządzić w rezultacie jej obliczenia dla kilku wybranych wartości zmiennej x . Jedną z nich niech będzie wartość T wynikająca z równości $\log x = m$. Stąd $x = 10^m = 10^{3,517} = 3290$ zł (warto zauważyć, że zgodnie ze wzorem (2.44) jest to mediana zmiennej x). Dla tej wartości x gęstość zmiennej x wynosi

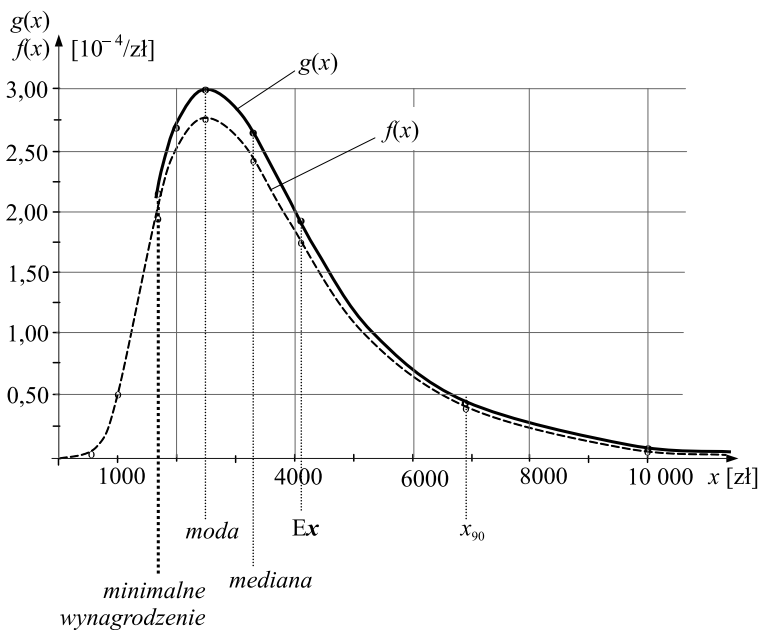
$$g(x) = \frac{1}{0,907} \frac{\log e}{\sigma T \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{0,907} \frac{\log e}{0,22 \cdot 3290 \sqrt{2\pi}} \cdot 1 = 2,646 \cdot 10^{-4} \text{ 1/zł}.$$

W podobny sposób wyznaczamy gęstość dla innych wybranych wartości x (tab. 2.2), zwłaszcza podawanych w raportach GUS.

Wyniki obliczeń umożliwiły sporządzenie wykresu gęstości prawdopodobieństwa $g(x)$ (rys. 2.19).

Tabela 2.2. Wyniki obliczeń gęstości prawdopodobieństwa

Wartość x [zł]	Nazwa wartości x	$f(x)$ [$10^{-4}/\text{zł}$]	$g(x)$ [$10^{-4}/\text{zł}$]
500	–	0,0157	–
1000	–	0,498	–
1680	płaca minimalna	1,947	2,147
2000	–	2,433	2,682
2470	moda	2,718	2,997
3290	mediana	2,404	2,646
4100	wartość oczekiwana	1,747	1,926
6920	kwantyl 90-procentowy	0,387	0,427
10 000	–	0,071	0,078



Rys. 2.19. Gęstość prawdopodobieństwa $g(x)$ zmiennej x (wynagrodzeń w sektorze przedsiębiorstw zatrudniających powyżej 9 osób w 2014 r.)

PRZYKŁAD 2.11

Z danych przedstawionych przez Główny Urząd Statystyczny wynika, że w 2014 roku struktura wynagrodzeń w sektorze przedsiębiorstw zatrudniających

powyżej 9 osób może być opisana w przybliżeniu przez rozkład prawdopodobieństwa logarytmiczno-normalny zmiennej losowej x [zł], uciętym lewostronnie w punkcie $a = 1680$ zł. Gęstość prawdopodobieństwa tej zmiennej ma postać (patrz przykład 2.10)

$$g(x) = \frac{1}{0,907 \sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.68)$$

gdzie m i σ to parametry zmiennej $\log x$ wynoszące: $m = E \log x = 3,517$, $\sigma = 0,22$. Wartość oczekiwana zmiennej losowej x , równa w przybliżeniu średniemu wynagrodzeniu, wynosiła w 2014 roku $\bar{x} = 4100$ zł.

Należy wyznaczyć odsetek pracujących zarabiających mniej niż średnie wynagrodzenie.

Rozwiązanie

Przyjmujemy, że poszukiwany odsetek osób zarabiających mniej niż średnie wynagrodzenie \bar{x} jest równy prawdopodobieństwu p tego, że tyle zarabia pracownik losowo wybrany spośród wszystkich pracujących (patrz rozdz. 5). Zatem

$$p = P\{x < \bar{x}\} = P\{x \leq \bar{x}\}.$$

Ze wzoru tego wynika, że prawdopodobieństwo p jest dystrybuantą $Q(\bar{x})$ zmiennej losowej x określoną dla wartości \bar{x} , czyli

$$p = Q(\bar{x}). \quad (2.69)$$

Zgodnie z wyrażeniem (2.3)

$$Q(\bar{x}) = \int_a^{\bar{x}} g(x) dx.$$

Po podstawieniu do niego wzoru (2.68) otrzymujemy

$$Q(\bar{x}) = \frac{1}{0,907} \int_a^{\bar{x}} \frac{\log e}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

gdzie funkcja podcałkowa

$$f(x) = \frac{\log e}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}}$$

jest, zgodnie ze wzorem (2.41), gęstością prawdopodobieństwa zmiennej x przed ucięciem, czyli o wartościach w przedziale $x > 0$ (rys. 2.19). Stąd

$$Q(\bar{x}) = \frac{1}{0,907} \int_a^{\bar{x}} f(x) dx.$$

Prawdopodobieństwo $Q(\bar{x})$ obliczymy, korzystając z wyrażenia (2.8) oraz ze wzoru (2.49) określającego związek dystrybuanty zmiennej losowej o rozkładzie logarytmiczno-normalnym z dystrybuantą $\Phi(y)$ standaryzowanej zmiennej losowej o rozkładzie normalnym. W rezultacie

$$Q(\bar{x}) = \frac{1}{0,907} \left[\Phi\left(\frac{\log \bar{x} - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\log a - m}{\sigma}\right) \right].$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy

$$Q(\bar{x}) = \frac{1}{0,907} \left[\Phi\left(\frac{\log 4100 - 3,517}{0,22}\right) - \Phi\left(\frac{\log 1680 - 3,517}{0,22}\right) \right].$$

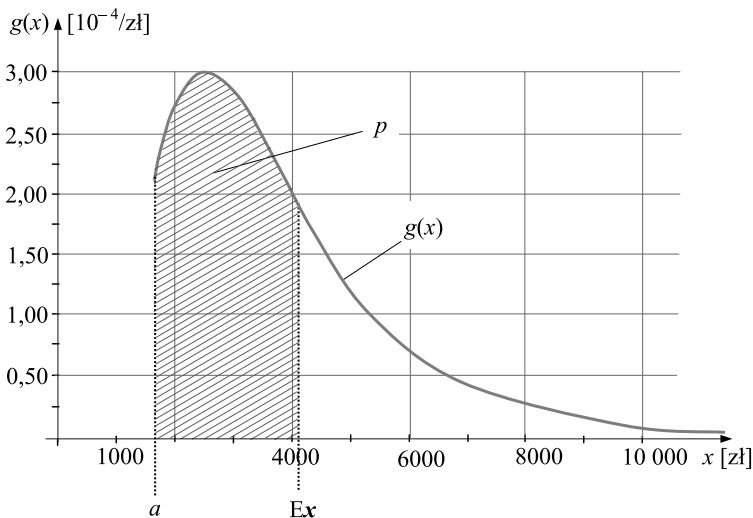
Stąd

$$Q(\bar{x}) = \frac{1}{0,907} [\Phi(0,435) - \Phi(-1,326)]. \quad (2.70)$$

Z odpowiednich tablic (zamieszczonej na przykład w Załączniku 1) funkcji Φ odczytujemy, że $\Phi(0,435) \approx 0,671$, a $\Phi(-1,326) = 1 - \Phi(1,326) = 0,093$. Po podstawieniu tych wartości do wyrażenia (2.70) uzyskujemy

$$Q(\bar{x}) = \frac{1}{0,907} (0,670 - 0,093) \approx 0,64.$$

Na tej podstawie przyjmijmy, że prawdopodobieństwo $p = 0,64$. Ilustracją tego prawdopodobieństwa jest zaciemnione pole zaznaczone na rysunku 2.20 pod wykresem gęstości prawdopodobieństwa $g(x)$ zmiennej losowej x , sporządzonym w przykładzie 2.10.

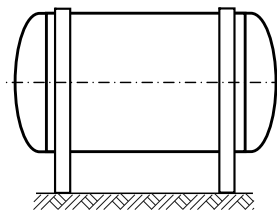


Rys. 2.20. Ilustracja prawdopodobieństwa p na tle rozkładu wynagrodzeń

Zatem odsetek osób zarabiających mniej niż średnie wynagrodzenie wynosi $p = 64\%$.

PRZYKŁAD 2.12

Zgodnie z projektem koncepcyjnym, zbiornik na sprężone powietrze (rys. 2.21) ma być zespawany z blach o grubości δ . Blachy wykonane są ze stali P460N przeznaczonej na urządzenia ciśnieniowe. Przewidywane ciśnienie w zbiorniku podczas eksploatacji będzie wielokrotnie w ciągu dnia narastało do wartości p i spadało do zera. Powodowana tym zmienność naprężeń w płaszczu zbiornika jest przyczyną zmęczenia materiału blach i łączących je spoin.



Rys. 2.21. Analizowany zbiornik ciśnieniowy

Wiadomo, że rozkład trwałości zmęczeniowej płaszcza zbiornika (w populacji takich samych zbiorników, tak samo eksploatowanych), określanej liczbą N jego napełnień, jest zbliżony do rozkładu logarytmiczno-normalnego o parametrach: $m = E \log N = 5,30$, $\sigma_{\log N} \equiv \sigma = 0,5$. Przybliżenie polega na potraktowaniu liczby napełnień N jako zmiennej losowej ciągłej, co ułatwia obliczenia.

Należy wyznaczyć taką liczbę napełnień zbiornika, by prawdopodobieństwo zmęczeniowego pęknięcia jego płaszcza nie przekraczało $q = 1\%$.

Rozwiązanie

Do zmęczeniowego uszkodzenia płaszcza zbiornika nie dojdzie z prawdopodobieństwem co najwyżej równym q , jeśli liczba napełnień zbiornika N_q spełni warunek

$$P\{N \leq N_q\} \leq q, \quad (2.71)$$

w którym niewiadomą jest wielkość N_q . Zauważmy, że lewa strona tego warunku to dystrybuenta $Q(N)$ zmiennej losowej N , określona dla wartości N_q . Ponieważ zmienna N ma rozkład logarytmiczno-normalny, to słuszna jest relacja (2.49) mająca w tym przypadku postać

$$Q(N_q) = \Phi\left(\frac{\log N_q - m}{\sigma}\right),$$

gdzie $\Phi(y)$ jest dystrybuantą standaryzowanej zmiennej losowej $y = \frac{\log N - m}{\sigma}$ o rozkładzie normalnym. Zatem warunkowi (2.71) można nadać formę

$$\Phi\left(\frac{\log N_q - m}{\sigma}\right) \leq 0,01. \quad (2.72)$$

W celu znalezienia wartości $y = \frac{\log N_q - m}{\sigma}$ zmiennej y , spełniającej warunek (2.72), korzystamy z tablic dystrybuanty zmiennej y (podobnie jak w poprzednich przykładach). Ze względu na małą wartość prawej strony warunku, przekształcamy lewą jego stronę przy użyciu relacji (2.23). Po tym przekształceniu warunek (2.72) przybiera postać

$$\Phi\left(-\frac{\log N_q - m}{\sigma}\right) \geq 0,99 \quad (2.73)$$

umożliwiającą skorzystanie ze wspomnianych tablic. Warunek (2.73) jest spełniony, jeśli (Załącznik 1)

$$-\frac{\log N_q - m}{\sigma} \geq 2,32.$$

Stąd

$$\log N_q \leq m - 2,32\sigma.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy

$$\log N_q \leq 5,30 - 2,32 \cdot 0,5,$$

czyli

$$\log N_q \leq 4,14.$$

Zatem powinno być $N_q \leq 13800$.

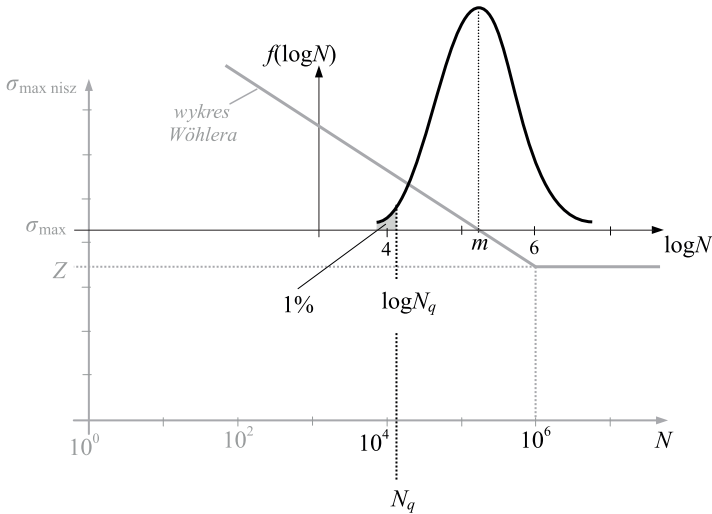
Są to wartości N_q spełniające warunek (2.72), a więc także warunek (2.71). Jeśli więc liczba napełnień zbiornika nie przekroczy $N_q = 13800 \approx 1,4 \cdot 10^4$, to prawdopodobieństwo zmęczeniowego pęknięcia jego płaszcza będzie wynosiło co najwyżej $q = 1\%$.

Uwaga: Poszukiwaną wartość N_q (patrz równanie (2.71)) możemy również wyznaczyć przy użyciu funkcji ROZKŁAD.LOG.ODW programu MS Excel (należy przy tym pamiętać, że podawana wartość oczekiwana i odchylenie standardowe dotyczą zmiennej losowej $\ln N$, trzeba je więc wcześniej wyliczyć przy użyciu zależności $\ln T = \ln 10 \cdot \log T$).

Można również zastosować inny sposób rozwiązania przykładu, korzystając z funkcji ROZKŁAD.NORMALNY.S.ODW i wyznaczając argument dystrybuanty w wyrażeniu (2.73).

Analizowany w przykładzie problem jest zilustrowany na rysunku 2.22, przedstawiającym rozkład zmiennej losowej $\log N$ (rozkład normalny) na tle znanego inżynierom mechanikom wykresu zmęczeniowego Wöhlera.

Zauważmy przy okazji, że wyznaczona liczba N_q jest 1-procentowym kwantylem zmiennej losowej N .



Rys. 2.22. Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\log N$ odpowiadającej naprężeniom σ_{\max} w płaszczu zbiornika, przedstawiona na tle wykresu zmęczenia Wöhlera

2.4. ROZKŁAD WEIBULLA

Rozkładem Weibulla jest nazywany rozkład zmiennej losowej ciągłej x określony przez funkcję gęstości prawdopodobieństwa o postaci

$$f(x) = a\lambda x^{a-1} e^{-\lambda x^a}, \quad (2.74)$$

przy czym $x > 0$ oraz $a > 0$ i $\lambda > 0$. Wykres tej funkcji jest przedstawiony na rysunku 2.23. Jego kształt zależy głównie od parametru a (nazywanego często parametrem kształtu).

W literaturze z zakresu probabilistyki podawana bywa także inna postać wzoru na gęstość prawdopodobieństwa rozkładu Weibulla.

Niektóre z właściwości rozkładu Weibulla są następujące:

- asymetria rozkładu zależy od parametru a i jest tym mniejsza, im większy jest ten parametr, przy wartościach $a > 3$ praktycznie zanika,
- gdy parametr $a = 1$, rozkład Weibulla staje się rozkładem wykładniczym (omawianym w podrozdz. 2.5),

- moda i mediana wynoszą (patrz przykłady 2.13 i 2.16)

$$\tilde{x} = \sqrt[a]{\frac{a-1}{a\lambda}}, \quad (2.75)$$

$$x_{0,5} = \sqrt[a]{\frac{\ln 0,5}{-\lambda}}, \quad (2.76)$$

- wartość oczekiwana i wariancja są wyznaczane za pomocą wzorów

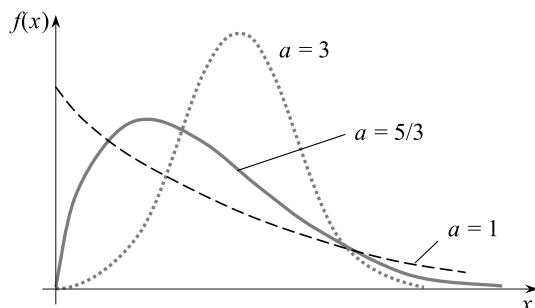
$$Ex = \frac{1}{\sqrt[a]{\lambda}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right), \quad (2.77)$$

$$Vx = \frac{1}{\sqrt[a]{\lambda^2}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - (Ex)^2, \quad (2.78)$$

gdzie Γ jest symbolem funkcji gamma (tablice jej wartości można znaleźć w literaturze, można też wyliczać jej wartości przy użyciu kalkulatorów dostępnych w internecie),

- dystrybuenta zmiennej losowej jest określona wzorem

$$Q(x) = 1 - e^{-\lambda x^a}. \quad (2.79)$$



Rys. 2.23. Przykłady gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej x o rozkładzie Weibulla przy wybranych wartościach parametru a

Rozkład Weibulla ma zastosowanie w technice, między innymi w inżynierii mechanicznej, zwłaszcza do opisu rozrzutów losowych trwałości obiektów starzejących się pod wpływem zmęczenia materiału, w szczególności zmęczenia powierzchniowego, i innych zjawisk fizycznych.

Szczególne ważne znaczenie w inżynierii mechanicznej ma ten rozkład przy opisie trwałości łożysk tocznych. W odniesieniu do nich wartość parametru a i wartości współczynników potrzebnych do obliczenia parametru λ są przyjmowane na podstawie wyników badań trwałości łożysk prowadzonych przez ich pro-

ducentów. Na przykład, w przypadku łożyska kulkowego $a = 10/9$, a w przypadku łożyska wałeczkowego $a = 9/8$. Parametr λ oblicza się przy użyciu wzoru

$$\lambda = \frac{0,1053}{L_{10}^a}, \quad (2.80)$$

gdzie L_{10} to tak zwana trwałość nominalna łożyska, której z prawdopodobieństwem 10% łożysko nie przekracza. Zatem trwałość nominalna jest 10-procentowym kwantylem zmiennej losowej L . Przyjęło się wyrażać trwałość łożyska tocznego w milionach wykonanych obrotów. Trwałość L_{10} jest wyznaczana na podstawie jego nośności dynamicznej, obciążenia, warunków jego pracy w urządzeniu mechanicznym itd.

PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 2.13

W odniesieniu do obiektu, którego trwałość x jest opisana rozkładem Weibulla, należy wyznaczyć modę tej zmiennej losowej jako funkcję parametrów a i λ .

Rozwiązanie

Jak wiadomo, moda, czyli dominanta, zmiennej losowej x jest to jej wartość \tilde{x} , dla której funkcja gęstości $f(x)$ osiąga swoje maksimum. Zatem do wyznaczenia mody zastosujemy warunek

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad (2.81)$$

gdzie $f(x)$ jest gęstością, wyrażoną przez wzór (2.74). Po podstawieniu tego wzoru do warunku (2.81) i po przekształceniach otrzymujemy

$$a\lambda x^{a-2} e^{-\lambda x^a} (a-1 - a\lambda x^a) = 0.$$

Są trzy rozwiązania tego równania, lecz to, które nas interesuje, wynika z rozwiązania równości

$$a-1 - a\lambda x^a = 0.$$

Stąd

$$\tilde{x} = \sqrt[a]{\frac{a-1}{a\lambda}}, \quad (2.82)$$

a to było celem przykładu.

Wzór (2.82) jest słuszny w odniesieniu do każdej zmiennej losowej o rozkładzie Weibulla.

PRZYKŁAD 2.14

Do podparcia wałka w przekładni zębatej zastosowano łożysko toczne kulkowe o cechach dostosowanych do wymagań poprawnej pracy przekładni. Trwałość nominalna, wyznaczona na podstawie znanego rodzaju łożyska, jego obciążenia w przekładni i warunków jego pracy (w tym jakości uszczelnienia), wynosi $L_{10} = 460$ mln obrotów łożyska. Po wyznaczeniu kilku wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej L narysować przybliżony przebieg wykresu tej funkcji.

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że rozrzuty losowe trwałości L [mln obr] analizowanego łożyska są opisane za pomocą rozkładu Weibulla. Zgodnie z wyrażeniem (2.74) gęstość prawdopodobieństwa zmiennej L ma postać

$$f(L) = a\lambda L^{a-1} e^{-\lambda L^a}, \quad (2.83)$$

gdzie $a = 10/9$ (gdyż jest to łożysko kulkowe), a drugi parametr wyznaczamy przy użyciu wzoru (2.80)

$$\lambda = \frac{0,1053}{L_{10}^a} = \frac{0,1053}{460^{10/9}} = 1,158 \cdot 10^{-4} \text{ 1/(mln obr)}^{10/9}. \quad (2.84)$$

Przybliżony przebieg wykresu funkcji (2.83) sporządzimy w rezultacie jej obliczenia dla kilku wybranych wartości zmiennej L . Jedną z nich niech będzie wartość $L = 50$ mln obr. Dla tej wartości L gęstość zmiennej L wynosi

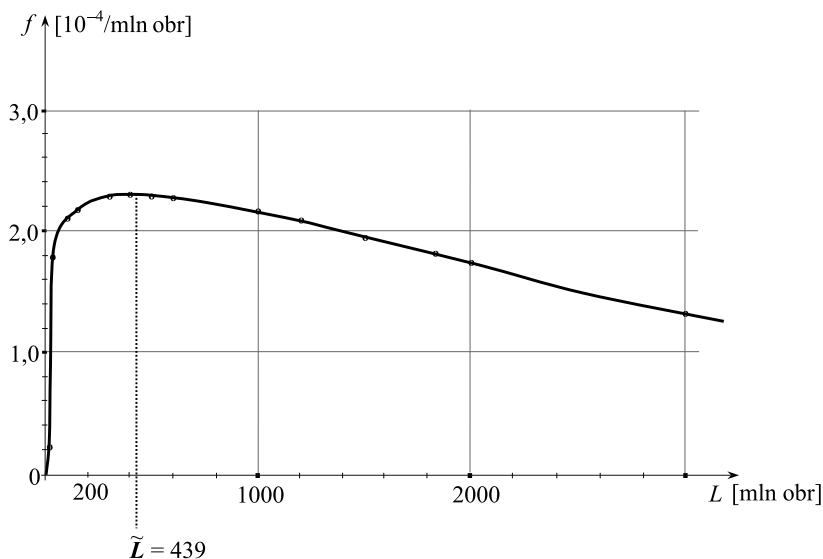
$$f(50) = \frac{10}{9} \cdot 1,158 \cdot 10^{-4} \cdot 50^{\frac{10}{9}-1} \cdot e^{-1,158 \cdot 10^{-4} \cdot 50^{\frac{10}{9}}} = 1,97 \cdot 10^{-4} \text{ 1/mln obr.}$$

W podobny sposób wyznaczamy gęstość dla innych wybranych wartości L . Część wyników obliczeń jest zamieszczona w tabeli 2.3.

Tabela 2.3. Wyniki obliczeń gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej L

L [mln obr]	50	100	300	400	600	1000	2000	3000
$f(L)$ [10^{-4} /mln obr]	1,97	2,11	2,27	2,29	2,27	2,16	1,75	1,34

Uzyskane w ten sposób współrzędne kilku punktów umożliwiają sporządzenie wykresu przybliżonego przebiegu gęstości prawdopodobieństwa $f(L)$ zmiennej losowej L , czyli trwałości analizowanego łożyska tocznego. Jest on przedstawiony na rysunku 2.24.



Rys. 2.24. Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej L

Uwaga: Wartości gęstości prawdopodobieństwa, potrzebne do narysowania wykresu gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej L , możemy obliczyć także przy użyciu programu MS Excel. W tym celu korzystamy z komendy ROZKŁAD.WEIBULL. Wymagane jest określenie:

- wartości $x \equiv L$ zmiennej losowej L , dla której chcemy dokonać obliczenia,
- wartości parametru $alfa \equiv a$ (w naszym przypadku $a = 10/9$),
- wartości parametru $beta \equiv 1/\lambda^{1/a}$ (konieczność tego przeliczenia wynika z innej postaci wzoru, określającego gęstość prawdopodobieństwa stosowanego w programie Excel, niż podana przez wzór (2.74),
- parametru logicznego, który określa, czy wynikiem obliczenia ma być gęstość prawdopodobieństwa, czy dystrybuanta.

Parametr logiczny definiujemy jako „Falsz” (w przykładzie obliczana jest bowiem wartość gęstości prawdopodobieństwa).

Wyznamy przy okazji największą wartość funkcji $f(L)$. Swoje maksimum funkcja ta osiąga dla wartości \tilde{L} , czyli mody (dominanty) zmiennej losowej L . Tę szczególną wartość zmiennej L obliczymy przy użyciu wyrażenia (2.82), używanego w przykładzie 2.13. W tym przypadku ma ono postać

$$\tilde{L} = \sqrt[a]{\frac{a-1}{a\lambda}}.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy

$$\tilde{L} = \frac{10}{9} \sqrt{\frac{\frac{10}{9} - 1}{\frac{10}{9} \cdot 1,158 \cdot 10^{-4}}} = 439 \text{ mln obr.}$$

Wartość funkcji $f(\tilde{L})$, wyznaczona przy użyciu wyrażenia (2.83), wynosi

$$f(\tilde{L}) = 2,29 \cdot 10^{-4} \text{ 1/mln obr.}$$

PRZYKŁAD 2.15

Należy wyznaczyć wartości dystrybuanty $Q(L)$ trwałości łożyska tocznego, analizowanego w przykładzie 2.14, oraz funkcji niezawodności $R(L) = 1 - Q(L)$ tego łożyska, a następnie sporządzić wykresy obu wielkości jako funkcji L . Potrzebne dane zaczerpnąć z przykładu 2.14.

Rozwiązanie

Dystrybuantę $Q(L)$ zmiennej losowej L wyznaczymy dla takich samych wartości L , dla których w przykładzie 2.14 były obliczana gęstość prawdopodobieństwa tej zmiennej. Posłużymy się przy tym wzorem (2.79), który w odniesieniu do zmiennej L przybiera postać

$$Q(L) = 1 - e^{-\lambda L^a}. \quad (2.85)$$

Zgodnie z relacją (2.84) $\lambda = 1,158 \cdot 10^{-4} \text{ 1/(mln obr)}^{10/9}$, a współczynnik $a = 10/9$ (gdyż mamy do czynienia z łożyskiem kulkowym).

Przedstawmy wyliczenie dystrybuanty $Q(L)$ dla wartości $L = 50$ mln obr.

$$Q(50) = 1 - e^{-1,158 \cdot 10^{-4} \cdot 50^{10/9}} = 1 - 0,991 = 0,009.$$

Funkcja niezawodności, czyli prawdopodobieństwo nieuszkodzenia łożyska w czasie $L = 50$, wynosi

$$R(50) = 1 - Q(50) = 0,991.$$

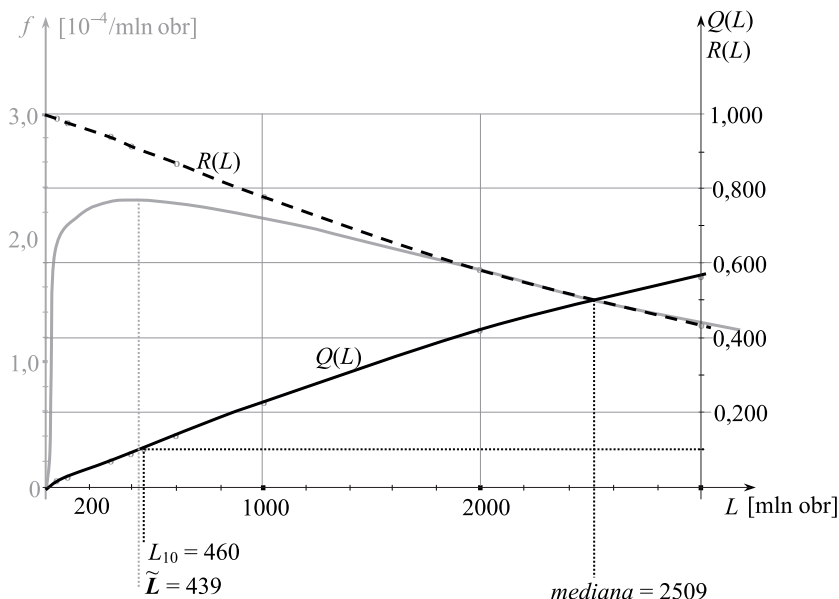
W podobny sposób wyznaczamy funkcje $Q(L)$ i $R(L)$ dla kilku innych wybranych wartości L . Część wyników obliczeń jest zamieszczona w tabeli 2.4.

Tabela 2.4. Wyniki obliczeń prawdopodobieństw uszkodzenia i nieuszkodzenia łożyska w czasie L

L [mln obr]	50	100	300	400	600	1000	2000	3000
$Q(L)$	0,009	0,019	0,063	0,086	0,132	0,221	0,417	0,571
$R(L)$	0,991	0,981	0,937	0,914	0,868	0,779	0,583	0,429

Uzyskane w ten sposób współrzędne kilku punktów umożliwiają sporządzenie wykresów funkcji $Q(L)$ i $R(L)$. Są one przedstawione na rysunku 2.25 na tle wykresu gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej L , wykonanego w przykładzie 2.14 dla tego samego łożyska.

Na rysunku zaznaczono także położenie mediany zmiennej L , uzyskanej w rezultacie rozwiązania przykładu 2.16.



Rys. 2.25. Dystrybuanta trwałości łożyska (zmiennej losowej L) i funkcja jego niezawodności (w tle wykres gęstości prawdopodobieństwa zmiennej L)

Uwaga: Obliczenia możemy wykonać podobnie jak w poprzednim przykładzie, przy użyciu programu MS Excel, korzystając z funkcji ROZKŁAD.WEIBULL. Należy pamiętać o wcześniejszym wyznaczeniu parametru $\beta \equiv 1/\lambda^{1/a}$ oraz zdefiniowaniu jako „PRAWDA” parametru logicznego, ponieważ obliczamy dystrybuantę.

PRZYKŁAD 2.16

Należy wyznaczyć medianę trwałości L łożyska tocznego, analizowanego w przykładzie 2.14, oraz usytuować na wykresie gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej L , przedstawionym na rysunku 2.25, położenie wyznaczonej mediany i wyznaczonej w przykładzie 2.14 mody tej zmiennej. Potrzebne dane zaczerpnąć z przykładu 2.14.

Rozwiązanie

Medianę $x_{0,5}$ zmiennej losowej L wyznaczymy, korzystając z warunku

$$Q(x_{0,5}) = 0,5, \quad (2.86)$$

gdzie $Q(x_{0,5})$ jest dystrybuantą zmiennej określoną dla wartości $x_{0,5}$. Zgodnie z wyrażeniem (2.79) lewa strona tego warunku wynosi

$$Q(x_{0,5}) = 1 - e^{-\lambda x_{0,5}^a}.$$

Po podstawieniu tego wzoru do warunku (2.86) i po przekształceniach otrzymujemy

$$-\lambda x_{0,5}^a = \ln 0,5.$$

Stąd

$$x_{0,5} = \sqrt[a]{\frac{\ln 0,5}{-\lambda}}. \quad (2.87)$$

W rezultacie podstawienia danych dotyczących analizowanego łożyska uzyskujemy poszukiwaną wartość mediany

$$x_{0,5} = \sqrt[9]{\frac{\ln 0,5}{-1,158 \cdot 10^{-4}}} = 2509 \text{ mln obr.}$$

Położenie tej wartości zaznaczono na rysunku 2.25 (w przykładzie 2.15).

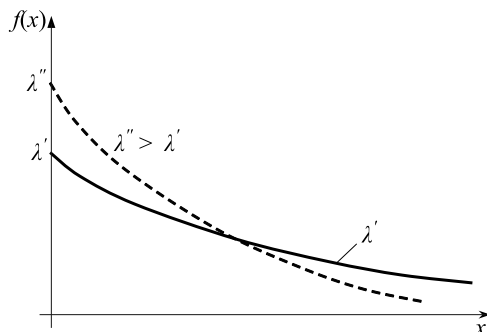
Warto zauważyć, że wyprowadzony w tym przykładzie wzór (2.87) jest prawdziwy w odniesieniu do każdej zmiennej losowej o rozkładzie Weibulla.

2.5. ROZKŁAD WYKŁADNICZY

Rozkładem wykładniczym jest nazywany rozkład zmiennej losowej ciągłej x określony przez funkcję gęstości prawdopodobieństwa o postaci

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad (2.88)$$

przy czym: $x > 0$ i $\lambda > 0$. Wykres tej funkcji jest przedstawiony na rysunku 2.26. Jak wspomniano w podrozdziale 2.4, rozkład wykładniczy jest szczególnym przypadkiem rozkładu Weibulla.



Rys. 2.26. Przykłady gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej x o rozkładzie wykładniczym dla dwóch różnych wartości parametru λ

Niektóre z właściwości rozkładu wykładniczego są następujące:

- wartość oczekiwana i odchylenie standardowe są sobie równe i wynoszą (patrz przykład 2.17)

$$E\mathbf{x} = \sigma = \frac{1}{\lambda}, \quad (2.89)$$

wobec czego współczynnik zmienności (2.13) $\beta = 1$,

- mediana wynosi (patrz przykład 2.18)

$$x_{0,5} = \frac{\ln 0,5}{-\lambda}, \quad (2.90)$$

- dystrybuenta zmiennej losowej jest określona wzorem

$$Q(x) = 1 - e^{-\lambda x}. \quad (2.91)$$

Rozkład wykładniczy jest jednym z najważniejszych rozkładów stosowanych w technice do opisu rozrzutów losowych odstępów czasowych między zdarzeniami, trwałości obiektów niestarzejących się (nieulegających zużyciu) itd. Rozkład ten odgrywa też wyjątkową rolę w analizach niezawodności.

PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 2.17

Wiadomo, że czas T upływający do uszkodzenia pokładowego układu sterowania samolotu bezzałogowego ma w przybliżeniu rozkład wykładniczy, przy czym parametr tego rozkładu $\lambda = 0,33 \cdot 10^{-3}$ 1/h. Należy wyznaczyć wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe zmiennej T .

Rozwiązanie

Zgodnie ze wzorem (2.10) wartość oczekiwana zmiennej losowej T wynosi

$$ET = \int_0^{\infty} T f(T) dT, \quad (2.92)$$

gdzie funkcja gęstości

$$f(T) = \lambda e^{-\lambda T}.$$

Stąd

$$ET = \lambda \int_0^{\infty} T e^{-\lambda T} dT. \quad (2.93)$$

Całkę w tym wzorze wyznaczymy metodą całkowania przez części. W tym celu wprowadzimy nowe zmienne u i v , przy czym:

$$u \equiv T, \quad dv = e^{-\lambda T} dT.$$

Stąd

$$du = dT, \quad v = \int e^{-\lambda T} dT = \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda T}.$$

Zatem

$$\int_0^{\infty} T e^{-\lambda T} dT = \left[T \cdot \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda T} - \int \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda T} dT \right]_0^{\infty} = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda T} \left(T + \frac{1}{\lambda} \right) \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (2.94)$$

W rezultacie podstawienia tego wyniku do wyrażenia (2.93) uzyskujemy

$$ET = \frac{1}{\lambda}.$$

Po podstawieniu wartości λ otrzymujemy

$$ET = \frac{1}{0,33 \cdot 10^{-3}} = 3000 \text{ h}.$$

Drugim wyznaczanym parametrem jest odchylenie standardowe σ zmiennej T . Jej związek (2.12) z wariancją ma postać

$$\sigma = \sqrt{VT}. \quad (2.95)$$

Zatem najpierw wyznaczymy wariancję VT zmiennej T . Zgodnie z wyrażeniem (2.11)

$$VT = E(T - ET)^2,$$

czyli

$$VT = \int_0^{\infty} \left(T - \frac{1}{\lambda}\right)^2 f(x) dx = \int_0^{\infty} \left(T - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda T} dT.$$

Po kilku przekształceniach otrzymujemy

$$VT = \lambda \left(\int_0^{\infty} T^2 e^{-\lambda T} dT - \frac{1}{\lambda^3} \right). \quad (2.96)$$

Do znalezienia całki występującej w nawiasie tego wyrażenia zastosujemy metodę całkowania przez części, wprowadzając nowe zmienne u i v , przy czym:

$$u \equiv T^2, \quad dv = e^{-\lambda T} dT.$$

Stąd

$$du = 2T dT, \quad v = \int e^{-\lambda T} dT = \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda T}.$$

Do wyznaczenia wspomnianej całki skorzystamy także z wyniku całkowania określonego we wzorze (2.94). Zatem

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} T^2 e^{-\lambda T} dT &= \left[T^2 \cdot \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda T} - \int \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda T} \cdot 2T dT \right]_0^{\infty} = \\ &= \left[T^2 \cdot \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda T} - \left(\left(\frac{2}{-\lambda} \right) \cdot \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda T} \left(T + \frac{1}{\lambda} \right) \right] \right) \right]_0^{\infty} = \\ &= \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda T} \left(T^2 + \frac{2}{\lambda} T + \frac{2}{\lambda^2} \right) \right]_0^{\infty} = \frac{2}{\lambda^3}. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Po podstawieniu tego wyniku do wyrażenia (2.96) otrzymujemy

$$VT = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Zgodnie ze wzorem (2.95) poszukiwane odchylenie standardowe wynosi więc

$$\sigma = \frac{1}{\lambda},$$

czyli tyle samo, co wartość oczekiwana. Zatem $\sigma = ET = 3000$ h.

PRZYKŁAD 2.18

Wiadomo, że czas T upływający do uszkodzenia pokładowego układu sterowania samolotu bezzałogowego ma w przybliżeniu rozkład wykładniczy, przy czym parametr tego rozkładu $\lambda = 0,33 \cdot 10^{-3}$ 1/h. Należy:

- 1) po wyznaczeniu kilku wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej T oraz dystrybuanty tej zmiennej narysować przybliżone wykresy obu funkcji,
- 2) wyznaczyć medianę zmiennej T i na obu wykresach zaznaczyć jej położenie oraz położenie wartości oczekiwanej zmiennej T .

Rozwiązanie

Ad 1) Zgodnie ze wzorami (2.88) i (2.91) funkcje, których wykresy mają być sporządzone, mają postacie

$$f(T) = \lambda e^{-\lambda T}, \quad (2.98)$$

$$Q(T) = 1 - e^{-\lambda T}. \quad (2.99)$$

Przybliżone przebiegi ich wykresów można sporządzić w rezultacie obliczenia wartości tych funkcji dla kilku wybranych wartości zmiennej T . Jedną z nich niech będzie wartość $T = 500$ h. Dla tej wartości T funkcje $f(T)$ i $Q(T)$ wynoszą

$$f(500) = 0,33 \cdot 10^{-3} e^{-0,33 \cdot 10^{-3} \cdot 500} = 0,28 \cdot 10^{-3} \text{ 1/h}$$

$$Q(500) = 1 - e^{-0,33 \cdot 10^{-3} \cdot 500} = 0,15.$$

W podobny sposób wyznaczamy obie funkcje dla innych wybranych wartości T (tab. 2.5).

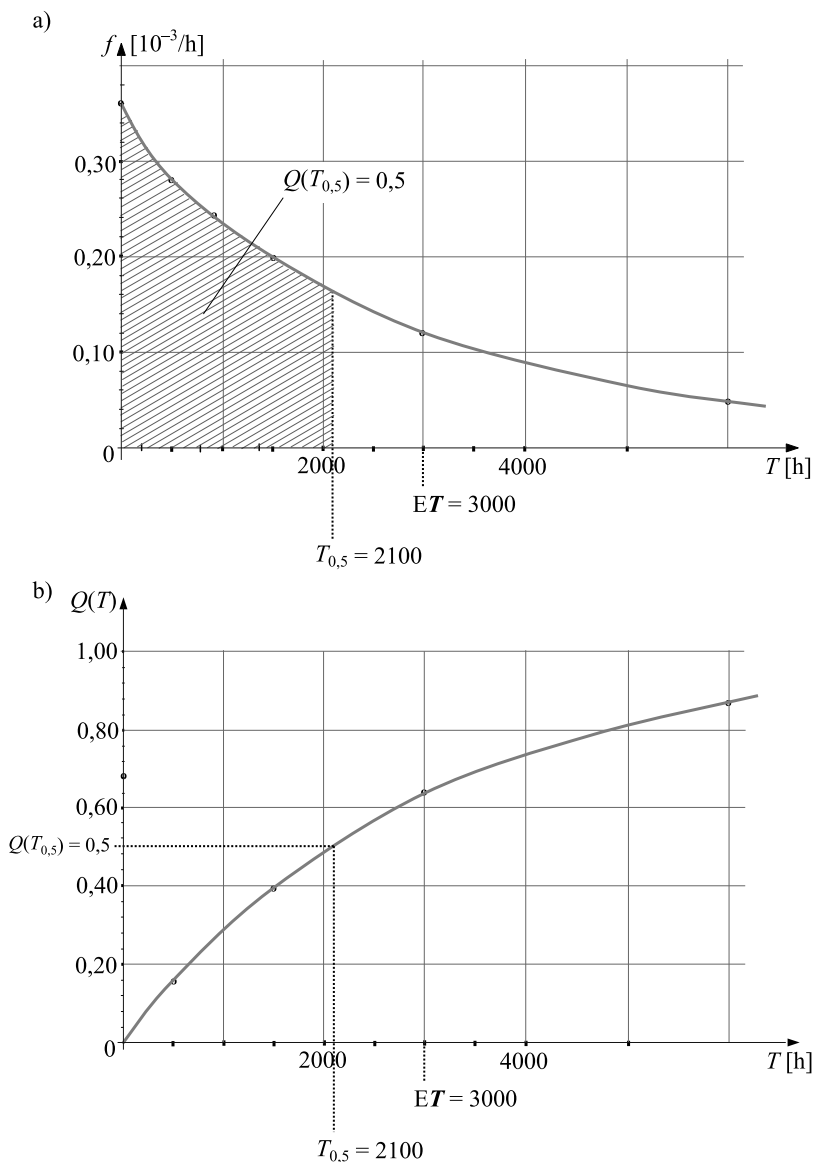
Tabela 2.5. Wyniki obliczeń gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanty czasu T

T [h]	0	500	1500	3000	6000
$f(T)$ [10^{-3} /h]	0,33	0,28	0,20	0,12	0,05
$Q(T)$	0	0,15	0,39	0,64	0,86

Wyniki obliczeń umożliwiają sporządzenie wykresów funkcje $f(T)$ i $Q(T)$ (rys. 2.27), co było celem rozwiązania przykładu. Na rysunku zaznaczono także położenie mediany, po wyznaczeniu jej w punkcie 2, oraz wartości oczekiwanej zmiennej T , uzyskanej w rezultacie rozwiązania przykładu 2.17.

Uwaga: Wartości gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanty możemy obliczyć także przy użyciu programu MS Excel. W tym celu korzystamy z komendy ROZKŁAD.EXP. Wymagane jest określenie:

- wartości $x \equiv T$ (w naszym przypadku czasu do uszkodzenia) zmiennej losowej T , dla której chcemy dokonać obliczenia,
- parametru λ lub $\lambda = 1/\mu$,
- parametru logicznego „Prawda” lub „Fałsz” w zależności od tego, czy wynikiem obliczenia ma być gęstość prawdopodobieństwa, czy dystrybuanta.



Rys. 2.27. a) Gęstość prawdopodobieństwa i b) dystrybuanta czasu T upływającego do uszkodzenia pokładowego układu sterowania samolotu bezałogowego

Medianę zmiennej T wyznaczmy, opierając się na definicji tej wielkości (2.15) i rozwiązując równanie

$$Q(T_{0,5}) = 0,5,$$

gdzie $Q(T_{0,5})$ jest dystrybuantą zmiennej określonej dla wartości $T_{0,5}$. Uwzględniając wzór (2.99), zapisujemy to równanie w postaci

$$1 - e^{-\lambda T_{0,5}} = 0,5.$$

Stąd

$$e^{-\lambda T_{0,5}} = 0,5$$

i w rezultacie

$$T_{0,5} = \frac{\ln 0,5}{-\lambda} = \frac{\ln 0,5}{-0,33 \cdot 10^{-3}} = 2100 \text{ h.}$$

PRZYKŁAD 2.19

Na podstawie danych statystycznych stwierdzono, że trwałość T pewnego urządzenia w samolocie pasażerskim ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 2,22 \cdot 10^{-6}$ 1/h. Należy wyznaczyć czas użytkowania tego urządzenia, podczas którego prawdopodobieństwo nieuszkodzenia będzie nie mniejsze niż 0,999.

Rozwiązanie

Wymaganie sformułowane w treści przykładu można zapisać w następującej formie matematycznej

$$P\{T > T\} \geq 0,999, \quad (2.100)$$

gdzie T jest poszukiwanym czasem użytkowania urządzenia. W nauce o niezawodności prawdopodobieństwo $P\{T > T\} \equiv R(T)$ jest nazywane funkcją niezawodności, w tym przypadku – analizowanego urządzenia.

Opierając się na relacji (2.6), lewą stronę warunku (2.100) można przedstawić w postaci

$$P\{T > T\} = 1 - Q(T),$$

przy czym $Q(T)$ to dystrybuanta zmiennej losowej T . Zgodnie z wyrażeniem (2.91)

$$Q(T) = 1 - e^{-\lambda T}.$$

Zatem warunkowi (2.100) nadajemy postać

$$e^{-\lambda T} \geq 0,999.$$

Stąd

$$T \leq \frac{\ln 0,999}{-\lambda}.$$

Prawa strona tej relacji wynosi

$$\frac{\ln 0,999}{-\lambda} = \frac{\ln 0,999}{-2,22 \cdot 10^{-6}} = 450 \text{ h.}$$

Czas użytkowania urządzenia, zapewniający spełnienie warunku (2.100) postawionego w przykładzie, nie powinien więc przekraczać 450 godzin.

Przy okazji warto zauważyć, że wyznaczony czas $T = 450$ jest 1-promilowym kwantylem zmiennej losowej T .

PRZYKŁAD 2.20

Na podstawie danych statystycznych stwierdzono, że średnia trwałość żarówek w reflektorach wynosi 15 000 h. Przyjmując, że czas zdatności T tych żarówek ma rozkład wykładniczy, należy wyznaczyć prawdopodobieństwo uszkodzenia pojedynczej żarówki w czasie $T = 1000$ h oraz czas $T_{0,10}$, po którym prawdopodobieństwo to osiągnie wartość 0,100.

Rozwiązanie

Prawdopodobieństwo uszkodzenia pojedynczej żarówki w czasie $T = 1000$ h, czyli prawdopodobieństwo tego, że realizacja zmiennej losowej T będzie co najwyżej równa $T = 1000$ h, jest to wartość dystrybuanty tej zmiennej. Zatem

$$P\{T \leq 1000\} = Q(1000).$$

Ponieważ trwałość żarówek ma rozkład wykładniczy, to zgodnie z wyrażeniem (2.91) poszukiwane prawdopodobieństwo wynosi

$$P\{T \leq 1000\} = 1 - e^{-\lambda T}. \quad (2.101)$$

Aby wyznaczyć jego wartość, konieczne jest wcześniejsze obliczenie parametru λ , gdyż nie jest on podany bezpośrednio. Charakterystyczny dla rozkładu wykładniczego jest związek tego parametru z wartością oczekiwaną zmiennej losowej, określony przez wzór (2.89). Wynika z niego, że

$$\lambda = \frac{1}{ET}.$$

W treści przykładu nie jest co prawda podana wartość oczekiwana ET , ale jest podany jej statystyczny odpowiednik (patrz rozdz. 5), mianowicie średnia trwałość żarówek. Przyjmijmy, że obie te wielkości są sobie równoważne, czyli że $ET = 15\,000$ h. Zatem

$$\lambda = \frac{1}{ET} = \frac{1}{15000} = 67 \cdot 10^{-6} \text{ 1/h.}$$

Po podstawieniu tej wartości do wyrażenia (2.101) otrzymujemy

$$P\{T \leq 1000\} = 1 - e^{-67 \cdot 10^{-6} \cdot 1000} = 1 - 0,935 = 0,065.$$

Tyle wynosi prawdopodobieństwo uszkodzenia pojedynczej żarówki w czasie 1000 godzin.

Druga wielkość poszukiwana w przykładzie to czas $T_{0,10}$, po którym prawdopodobieństwo uszkodzenia żarówki osiągnie wartość 0,100. Zauważmy, że czas ten to 10-procentowy kwantyl zmiennej losowej T . Znajdziemy go z warunku

$$Q(T_{0,10}) = 0,100,$$

w którym $Q(T_{0,10})$ jest dystrybuantą zmiennej T , określoną dla wartości tej zmiennej wynoszącej $T_{0,10}$. Korzystając z wyrażenia (2.91), warunek ten przedstawiamy w formie

$$1 - e^{-\lambda T_{0,10}} = 0,100.$$

Stąd

$$e^{-\lambda T_{0,10}} = 0,900.$$

W rezultacie rozwiązania tego równania uzyskujemy poszukiwany czas

$$T_{0,10} = \frac{\ln 0,900}{-\lambda}$$

i w efekcie

$$T_{0,10} = \frac{\ln 0,900}{-67 \cdot 10^{-6}} = 1572 \text{ h.}$$

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

ROZKŁAD NORMALNY I LOGARYTMICZNO-NORMALNY

Zadanie 2.1

Walek przekładni zębatej jest wykonany ze stali niestopowej C30 o granicy plastyczności $R_e = 300$ MPa, podawanej w tabelach właściwości materiałów konstrukcyjnych. Przy założeniu, że wartość ta jest 2-procentowym kwantylem zmiennej losowej R_e o rozkładzie normalnym, a współczynnik jej zmienności wynosi $\beta = 0,07$, należy wyznaczyć prawdopodobieństwo $P\{m - 3\sigma \leq R_e \leq m + 3\sigma\}$.

Zadanie 2.2

Granica wytrzymałości R_m pewnej stali stopowej ma rozkład normalny o parametrach: wartość oczekiwana $ER_m = 1680$ MPa, odchylenie standardowe $\sigma = 140$ MPa. W rezultacie poprawy jako-

ści procesu wytwarzania stali udało się zmniejszyć rozrzuty losowe wielkości R_m tak, że jej odchylenie standardowe wyniosło 110 MPa. Należy:

- wyznaczyć wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej R_m dla wartości $R_m = ER_m$ w odniesieniu do obu procesów wytwarzania stali,
- w przyjętym układzie współrzędnych narysować przybliżony przebieg wykresów gęstości prawdopodobieństwa granicy wytrzymałości R_m tej stali uzyskiwanej w wyniku obu procesów jej wytwarzania.

Zadanie 2.3

Walek przekładni zębatej jest wykonany ze stali niestopowej C30 o granicy plastyczności $R_e = 300$ MPa, podawanej w tabelach właściwości materiałów konstrukcyjnych. Przy założeniu, że wartość ta jest 2-procentowym kwantylem zmiennej losowej R_e o rozkładzie normalnym, a współczynnik jej zmienności wynosi $\beta = 0,07$, należy wyznaczyć parametry zmiennej R_e , tj. wartość oczekiwaną m i odchylenie standardowe σ .

Zadanie 2.4

Walek przekładni zębatej jest wykonany ze stali niestopowej C30 o granicy plastyczności $R_e = 300$ MPa, podawanej w tabelach właściwości materiałów konstrukcyjnych. Przy założeniu, że wartość ta jest 2-procentowym kwantylem zmiennej losowej R_e o rozkładzie normalnym, a współczynnik jej zmienności wynosi $\beta = 0,07$, należy wyznaczyć iloraz kwantyli 98-procentowego i 2-procentowego. Wyniki zilustrować na wykresie gęstości prawdopodobieństwa zmiennej R_e , sporządzonym w sposób przybliżony.

Zadanie 2.5

Na średnicę wewnętrzną $d = 50$ mm pierścienia wewnętrznego łożyska tocznego narzucone są odchyłki wymiarowe: dolna $El = -15$ μm i górna $ES = 0$. Zapewnienie wymiaru o takich cechach odbywa się na obrabiarce sterowanej numerycznie przez odpowiednie ustawienie parametrów jej pracy. W rezultacie kontroli wymiarów dokonywanej na dużej liczbie próbek statystycznej pierścieni stwierdzono, że rozrzut przypadkowy uzyskiwanego wymiaru d można opisać rozkładem normalnym o parametrach: wartość oczekiwana $m = 49,992$ mm, odchylenie standardowe $\sigma = 0,004$ mm, a wadliwość pierścieni wytwarzanych przy tak ustawionych parametrach obrabiarki wynosiła 6,3%. Postanowiono zmienić ustawienia obrabiarki, by zmniejszyć liczbę pierścieni nienadających się do naprawy. Okazało się, że w wyniku tej zmiany zmienił się tylko jeden parametr zmiennej losowej d , mianowicie jej wartość oczekiwana wzrosła do $m = 49,995$ mm. Należy określić całkowitą wadliwość pierścieni wytwarzanych przy nowych ustawieniach parametrów obrabiarki oraz odsetek tych wadliwych pierścieni, których średnica przekracza wymiar 50^{ES} .

Zadanie 2.6

Odległość nominalna osi dwóch otworów w korpusie maszyny wynosi $l_o = 100$ mm. Na odległość l , uzyskiwaną w procesie wykonywania otworów, narzucone są odchyłki: dolna $= -150$ μm i górna $= 50$ μm . Przy założeniu, że przypadkowy rozrzut odległości l w wykonywanych egzemplarzach korpusu jest opisany rozkładem normalnym o wartości oczekiwanej $El \equiv m = 99,950$ mm, należy wyznaczyć takie odchylenie standardowe σ zmiennej l , by wadliwość korpusów ze względu na odległość osi otworów nie przekraczała 1%.

Zadanie 2.7

Czas trwania akcji ratowniczej w jednym z dużych miast Polski jest zmienną losową T [h] o rozkładzie logarytmiczno-normalnym o parametrach: $m \equiv E \log T = -0,20$, $\sigma_{\log T} \equiv \sigma = 0,25$. Należy wyznaczyć odsetek akcji, które mogą trwać dłużej niż 1,5 godziny.

Zadanie 2.8

Czas trwania akcji ratowniczej w jednym z dużych miast Polski był zmienną losową T [h] o rozkładzie logarytmiczno-normalnym o parametrach: $m \equiv E \log T = -0,20$, $\sigma_{\log T} \equiv \sigma = 0,25$. W rezultacie usprawnienia organizacji działań ratowniczych w kolejnych latach okazało się, że wartość oczekiwana ET czasu trwania akcji uległa zmniejszeniu o 10%. Korzystając z wyrażeń określających związek między parametrami zmiennych $\log T$ i T , należy wyznaczyć wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe obu zmiennych po wspomnianym usprawnieniu.

Zadanie 2.9

Czas trwania akcji ratowniczej w jednym z dużych miast Polski jest zmienną losową T [h] o rozkładzie logarytmiczno-normalnym o parametrach: $m \equiv E \log T = -0,20$, $\sigma_{\log T} \equiv \sigma = 0,25$. Należy wyznaczyć 20-procentowy kwantyl zmiennej losowej T .

Zadanie 2.10

Według danych GUS przeciętne wynagrodzenie w sektorze przedsiębiorstw zatrudniających powyżej 9 pracowników w roku 2014 wyniosło 4100 zł, a w 2018 roku – 4850 zł. Według raportów GUS (publikowanych co 2 lata) rozrzut wynagrodzeń w tych przedsiębiorstwach podlega rozkładowi logarytmiczno-normalnemu, uciętemu lewostronnie przez wynagrodzenie minimalne, które w 2014 roku wynosiło 1680 zł, a w 2018 roku 2100 zł. Skala rozrzutu, określona przez odchylenie standardowe zmiennej losowej $\log T$, jest jednakowa w obu wymienionych latach i wynosi $\sigma_{\log T} \equiv \sigma = 0,25$. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że losowo wskazany pracownik zarobił co najmniej 3000 zł w 2014 r. i w 2018 r.

Zadanie 2.11

Według danych GUS przeciętne wynagrodzenie w sektorze przedsiębiorstw zatrudniających powyżej 9 pracowników w roku 2014 wyniosło 4100 zł, a w 2018 r. – 4850 zł. Według raportów GUS (publikowanych co 2 lata) rozrzut wynagrodzeń w tych przedsiębiorstwach podlega rozkładowi logarytmiczno-normalnemu, uciętemu lewostronnie przez wynagrodzenie minimalne, które w 2014 r. wynosiło 1680 zł, a w 2018 r. 2100 zł. Skala rozrzutu, określona przez odchylenie standardowe zmiennej losowej $\log T$, jest jednakowa w obu wymienionych latach i wynosi $\sigma_{\log T} \equiv \sigma = 0,25$. Należy wyznaczyć dominantę wynagrodzeń w 2014 r. i w 2018 r.

Zadanie 2.12

Zbiornik na sprężone powietrze, analizowany w przykładzie 2.12, został zaprojektowany na ciśnienie wynoszące p . Okazało się, że trwałość zmęczeniowa płaszcza zbiornika wynikająca z wielokrotnego jego napełniania do ciśnienia p , określana liczbą N napełnień, ma duże rozrzuty losowe. W celu ułatwienia obliczeń przyjęto, że jest to zmienna losowa ciągła o rozkładzie logarytmiczno-normalnym o określonych parametrach. Jeśli liczba napełnień zbiornika nie przekracza $N_q = 1,4 \cdot 10^4$, to prawdopodobieństwo zmęczeniowego pęknięcia jego płaszcza wynosi co najwyżej $q = 1\%$. Należy przeanalizować, jak na prawdopodobieństwo q przy tej samej liczbie napełnień mogłaby wpłynąć decyzja o napełnianiu zbiornika do ciśnienia o 10% większego niż pierwotnie planowano. Można przy tym założyć, że w wyniku takiego wzrostu ciśnienia napełniania rozkład trwałości zmęczeniowej, określanej liczbą napełnień N , pozostaje rozkładem logarytmiczno-normalnym, nie zmienia się też odchylenie standardowe $\sigma_{\log N} \equiv \sigma$ zmiennej losowej $\log N$ i wynosi 0,5. Udowodniono, że ulega istotnej zmianie jedynie wartość oczekiwana tej zmiennej, mianowicie zmniejsza się do wartości $m = E \log N = 4,80$.

Zadanie 2.13

Opierając się na informacjach o zbiorniku ciśnieniowym opisanym w treści zadania 2.12 i po wyznaczeniu kilku wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\log N$ i zmiennej losowej N , należy narysować przybliżone przebiegi wykresów obu tych funkcji w układach współrzędnych odpowiednio: $f - \log N$ i $f - N$.

Zadanie 2.14

Należy wyznaczyć taką liczbę napełnień zbiornika, o którym mowa w zadaniu 2.12, by mimo zwiększenia ciśnienia napełnienia o 10% prawdopodobieństwo q zmęczeniowego uszkodzenia płaszcza zbiornika wynosiło nadal co najwyżej 1%. Pozostałe potrzebne informacje zaczerpnąć z treści zadania 2.12.

Zadanie 2.15

Siła tarcia T rozwijana w połączeniu ciernym wieńca koła zębatego z korpusem koła ma rozrzuty losowe opisane przez rozkład normalny o parametrach: $ET = 3,27$ kN, $\sigma_T = 0,25$ kN (patrz przykład 2.22). Należy wyznaczyć największą zewnętrzną siłę obwodową, jaka może być przenoszona z jednego łączonego elementu na drugi, by prawdopodobieństwo wywołania poślizgu nie przekroczyło 0,05.

ROZKŁAD WEIBULLA

Zadanie 2.16

Do podparcia wałka w przekładni zębatej zastosowano łożysko toczne kulkowe o cechach dostosowanych do wymagań poprawnej pracy przekładni. Trwałość nominalna, wyznaczona na podstawie znanego rodzaju łożyska, jego obciążenia w przekładni i warunków jego pracy (w tym jakości uszczelnienia), wynosi $L_{10} = 460$ mln obrotów łożyska. Należy wyznaczyć trwałość pojedynczego egzemplarza łożyska tocznego, zapewniającą jego nieuszkodzenie z prawdopodobieństwem 0,95. Przyjmując, że trwałość łożyska jest opisana rozkładem Weibulla o parametrach: $a = 10/9$, $\lambda = 0,1053/L_{10}^a$.

Zadanie 2.17

Do podparcia wałka w przekładni zębatej zastosowano łożysko toczne kulkowe o cechach dostosowanych do wymagań poprawnej pracy przekładni. Trwałość nominalna, wyznaczona na podstawie znanego rodzaju łożyska, jego obciążenia w przekładni i warunków jego pracy (w tym jakości uszczelnienia), wynosi $L_{10} = 460$ mln obrotów łożyska. Należy wyznaczyć taką liczbę milionów obrotów łożyska, by prawdopodobieństwo jego uszkodzenia nie przekroczyło 2%. Przyjmując, że trwałość łożyska jest opisana rozkładem Weibulla o parametrach: $a = 10/9$, $\lambda = 0,1053/L_{10}^a$.

Zadanie 2.18

Obciążenie P łożyska tocznego kulkowego o trwałości nominalnej $L_{10} = 460$ mln obrotów okazało się w eksploatacji większe niż zakładano o 10%. Wiedząc, że trwałość L_{10} łożyska kulkowego jest funkcją obciążenia o postaci $L_{10} = cP^{-3}$ (c – stała), należy określić, jak taka zmiana obciążenia wpłynie na trwałość pojedynczego egzemplarza łożyska tocznego, zapewniającą jego nieuszkodzenie z prawdopodobieństwem 0,95. Przyjmując, że trwałość łożyska L jest opisana rozkładem Weibulla o parametrach: $a = 10/9$, $\lambda = 0,1053/L_{10}^a$.

Zadanie 2.19

W projekcie wirówki przewidziano podparcie jej wałka łożyskami tocznymi – kulkowym i walcowym. Trwałość nominalna łożyska walcowego, wyznaczona na podstawie znanego jego obciążenia i warunków jego pracy w wirówce (w tym jakości uszczelnienia), wynosi $L_{10} = 742$ mln obrotów łożyska. Po wyznaczeniu kilku wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej L narysować przybliżony przebieg wykresu tej funkcji. Przyjąć, że trwałość łożyska jest opisana rozkładem Weibulla o parametrach: $a = 9/8$, $\lambda = 0,1053/L_{10}^a$.

Zadanie 2.20

W projekcie wirówki przewidziano podparcie jej wałka łożyskami tocznymi – kulkowym i walcowym. Trwałość nominalna łożyska walcowego, wyznaczona na podstawie znanego jego obciążenia i warunków jego pracy w wirówce (w tym jakości uszczelnienia), wynosi $L_{10} = 742$ mln obrotów łożyska. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo nieuszkodzenia tego łożyska w czasie użytkowania wirówki, podczas którego łożysko wykona $L = 0,5L_{10}$ obrotów. Przyjąć, że trwałość łożyska L jest opisana rozkładem Weibulla o parametrach: $a = 9/8$, $\lambda = 0,1053/L_{10}^a$.

Zadanie 2.21

W projekcie wirówki przewidziano podparcie jej wałka łożyskami tocznymi – kulkowym i walcowym. Trwałość nominalna łożyska walcowego, wyznaczona na podstawie znanego jego obciążenia i warunków jego pracy w wirówce (w tym jakości uszczelnienia), wynosi $L_{10} = 742$ mln obrotów łożyska. Należy wyznaczyć medianę trwałości łożyska L , przy założeniu, że zmienna losowa L jest opisana rozkładem Weibulla o parametrach: $a = 9/8$, $\lambda = 0,1053/L_{10}^a$.

Zadanie 2.22

Przyjmuje się, że elektrownia wiatrowa może funkcjonować, jeśli prędkość wiatru jest nie mniejsza niż 4 m/s. Do opisu rozkładu prędkości wiatru v w przyjętym okresie najlepiej pasuje rozkład Weibulla, a jego parametry a i λ zależą głównie od położenia geograficznego elektrowni i od wysokości, na której usytuowana jest oś wirtualna. Na podstawie pomiarów dokonanych w jednej z gmin województwa dolnośląskiego na wysokości 48 m możliwe było oszacowanie obu parametrów zmiennej losowej v , charakterystycznych dla tej lokalizacji i czasu 1 roku. Wynoszą one: $a = 2,35$ m/s, $\lambda = 0,025$. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo przekraczania w skali 1 roku przez wiatr prędkości $v_{gr} = 4$ m/s.

ROZKŁAD WYKŁADNICZY

Zadanie 2.23

Ustalono, że średnia trwałość żarówek w reflektorach wynosi 15 000 h. Przyjmując, że czas zdatności T tych żarówek ma rozkład wykładniczy, należy wyznaczyć wartość oczekiwaną i medianę tej zmiennej losowej.

Zadanie 2.24

Trwałość T pewnego urządzenia ma rozkład wykładniczy. Wartość oczekiwana tej trwałości $ET = 1500$ h. Należy wyznaczyć wartość funkcji niezawodności urządzenia w czasie $t = 800$ h oraz prawdopodobieństwo wystąpienia w tym czasie niesprawności urządzenia. Uzyskane wyniki należy przedstawić na tle wykresu gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej T .

Zadanie 2.25

Przedstaw przybliżony przebieg wykresu gęstości prawdopodobieństwa $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ zmiennej losowej x o rozkładzie wykładniczym, przy czym $\lambda = 0,025$ 1/rok. Wyznacz wartość oczekiwaną Ex zmiennej x oraz prawdopodobieństwo $P\{x > Ex\}$, wiedząc, że dystrybuenta analizowanej zmiennej losowej wynosi $Q(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Zaznacz na narysowanym wykresie położenie wartości oczekiwanej oraz przedstaw graficznie wielkość $Q(x)$ dla $x = Ex$.

Zadanie 2.26

Przedstaw przybliżony przebieg wykresu gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej x o rozkładzie wykładniczym, przy czym $\lambda = 0,10$ 1/rok.

- Określ bez obliczeń, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa x przyjmie wartość większą niż zero.
- Oblicz prawdopodobieństwo $P\{x > 10 \text{ h}\}$, wiedząc, że dystrybuenta analizowanej zmiennej losowej wynosi $Q(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Na narysowanym wykresie przedstaw graficznie i w sposób przybliżony wielkość wyznaczonego prawdopodobieństwa.

Zadanie 2.27

Zmienna losowa x ma rozkład wykładniczy, przy czym parametr $\lambda = 0,6$. Należy narysować przybliżone przebiegi wykresów gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuenty tej zmiennej.

Zadanie 2.28

Zmienna losowa x ma rozkład wykładniczy o parametrze λ . Należy sporządzić wykresy gęstości prawdopodobieństwa tej zmiennej odpowiadające wartościom parametru $\lambda = 0,5$ i $\lambda = 0,2$. W odniesieniu do obu tych przypadków należy wyznaczyć wartości oczekiwane i mediany zmiennej x oraz zaznaczyć ich położenie na rysunku.

Zadanie 2.29

Na podstawie badań samolotu bezzałogowego stwierdzono, że czas t upływający do uszkodzenia pokładowego układu sterowania ma w przybliżeniu rozkład wykładniczy, a średnia wartość tego czasu wynosi 3000 h. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo poprawnego funkcjonowania układu w czasie misji trwającej $t_k = 10$ h.

Zadanie 2.30

Na podstawie badań samolotu bezzałogowego stwierdzono, że czas t upływający do uszkodzenia pokładowego układu sterowania ma w przybliżeniu rozkład wykładniczy, a średnia wartość tego czasu wynosi 3000 h. Należy wyznaczyć odchylenie standardowe σ zmiennej losowej t oraz jej medianę.

Zadanie 2.31

Wiadomo, że czas T upływający do uszkodzenia pokładowego układu sterowania samolotu bezzałogowego ma w przybliżeniu rozkład wykładniczy, przy czym parametr tego rozkładu $\lambda = 0,33 \cdot 10^{-3}$ 1/h. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo uszkodzenia tego układu w czasie lotu trwającego $t = 30$ minut.

Zadanie 2.32

Czas τ upływający między kolejnymi zgłoszeniami zapotrzebowania na interwencję pojedynczej jednostki ratowniczej w jednym z dużych miast Polski ma rozkład wykładniczy o parametrze $\lambda = 87 \cdot 10^{-3}$ 1/h. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 1 godziny po rozpoczęciu poprzedniej akcji ratowniczej pojawi się w jednostce ratowniczej kolejne zgłoszenie.

Zadanie 2.33

Na podstawie danych o wypadkach rejestrowanych w pewnej firmie budowlanej stwierdzono, że prawdopodobieństwo zajścia wypadku śmiertelnego w tej firmie w ciągu 1 roku wynosi $Q(1) = 88 \cdot 10^{-3}$. Przyjmując, że czas τ upływający w tej firmie między kolejnymi wypadkami śmiertelnymi ma rozkład wykładniczy, należy wyznaczyć wartość oczekiwaną tego czasu.

Zadanie 2.34

Trwałość T pewnego urządzenia w samolocie pasażerskim ma rozkład wykładniczy, a wartość oczekiwana tej zmiennej losowej $ET = 450 \cdot 10^3$ h. Należy wyznaczyć czas użytkowania urządzenia, by prawdopodobieństwo jego nieuszkodzenia było nie mniejsze niż 0,998.

Zadanie 2.35

W celu określenia niezawodności pewnego typu prędkościomierza przeprowadzono badania doświadczalne odpowiednio dobranej liczby egzemplarzy tych urządzeń. Na podstawie uzyskanych wyników stwierdzono, że trwałość T prędkościomierza ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej $ET = 7 \cdot 10^3$ h. Należy wyznaczyć czas funkcjonowania, po którym prawdopodobieństwo uszkodzenia pojedynczego egzemplarza prędkościomierza wzrośnie do wartości 0,05.

2.6. FUNKCJE ZMIENNYCH LOSOWYCH CIĄGLYCH

FUNKCJE JEDNEJ ZMIENNEJ LOSOWEJ

Inżynier ma w swojej praktyce do czynienia z wielkościami, które są funkcjami innych wielkości. Jeśli na przykład wielkość y jest funkcją jednej wielkości x , czyli $y = \psi(x)$, a x jest traktowana jako zmienna losowa, to y też jest zmienną losową, przy czym związek między nimi ma postać $y = \psi(x)$.

Najprostszą postacią funkcji ψ jest funkcja liniowa

$$y = ax + b, \quad (2.102)$$

gdzie a i b są wielkościami zdeterminowanymi. Przykładami takiej relacji w inżynierii mechanicznej mogą być związki między:

- naprężeniem (y) i obciążeniem (x), np. o postaci $\tau = M/W$, przy czym τ to naprężenia tnące w określonym przekroju wałka skręcanego momentem M , a W jest wskaźnikiem przekroju na skręcanie,
- odkształceniem (y) i obciążeniem (x), np. o postaci $\varepsilon = Ml/GI_o$, przy czym ε to odkształcenie skrętne wałka na długości l skręcanego momentem M , a I_o jest biegunowym momentem bezwładności przekroju wałka,
- siłą tarcia (y) i współczynnikiem tarcia (x) w połączeniu ciernym dwóch elementów, np. o postaci $T = a\mu$, przy czym T to siła tarcia na wspólnej powierzchni obu elementów, natomiast a jest wielkością odwzorowującą inne cechy połączenia (patrz przykład 2.23).

Postać funkcji ψ bywa czasami bardziej złożona niż postać funkcji liniowej. W obszarze inżynierii mechanicznej występują na przykład funkcje:

$$y = ax^n, \quad (2.103)$$

z wykładnikiem $n > 1$, lub

$$y = \frac{a}{x^n}, \quad (2.104)$$

z wykładnikiem $n \geq 1$, przy czym a jest współczynnikiem zdeterminowanym.

Przykładem funkcji (2.103) jest zależność między trwałością zmęczeniową (y) elementu urządzenia i granicą zmęczenia (x) materiału elementu, o postaci $N = Z^n N_{gr} / \tau^n$, przy czym N to trwałość zmęczeniowa jako funkcja granicy zmęczenia Z i zmiennych naprężeń o stałej zdeterminowanej wartości maksymalnej τ , a N_{gr} i współczynnik n to wielkości charakteryzujące wykres zmęczeniowy materiału elementu.

Przykładem funkcji (2.104) jest zależność między trwałością łożyska ślizgowego (y) i podatnością (x) materiału panewki na zużycie cierne, o postaci $t = \Delta / c v p$, przy czym t to trwałość łożyska jako funkcja: dopuszczalnego zużycia Δ , podatności c materiału panewki na zużycie, prędkości poślizgu v czopa wałka w stosunku do panewki, p – naciski jednostkowe na powierzchni współpracy czopa i panewki.

W każdej z takich postaci funkcji $y = \psi(x)$ zakładamy, że znana jest gęstość prawdopodobieństwa $f(x)$ zmiennej losowej x , a poszukujemy rozkładu zmiennej y , np. w postaci jej gęstości prawdopodobieństwa $g(y)$. Wyrażenie wiążące ze sobą obie gęstości ma często formę [3, 5]

$$g(y) = f[x(y)] \cdot \left| \frac{dx(y)}{dy} \right|, \quad (2.105)$$

gdzie $x(y)$ jest funkcją odwrotną do funkcji ψ . Można je jednak stosować tylko wtedy, gdy spełnione są pewne założenia, np. gdy funkcja ψ jest różniczkowalna i monotoniczna. W ogólnym przypadku do wyznaczenia rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej y często wygodniejsze jest wykorzystanie związku między dystrybuantami zmiennych y i x [3, 5].

PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 2.21

Dwie wielkości traktowane jako zmienne losowe są związane funkcją o postaci

$$y = 3x + 2b, \quad (2.106)$$

przy czym zmienna x ma rozkład normalny o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2.107)$$

i parametrach: $Ex = 0$, $\sigma = 1$. Należy wyznaczyć postać gęstości zmiennej losowej y oraz jej parametry.

Rozwiązanie

Postawiony cel osiągniemy, korzystając ze wzoru (2.105). Zauważmy, że funkcja odwrotna do funkcji (2.106) ma postać

$$x(y) = \frac{y-2}{3},$$

a jej pochodna względem y

$$\frac{dx(y)}{dy} = \frac{1}{3}.$$

Po podstawieniu tych wyrażeń do wzoru (2.105) otrzymujemy jego postać odpowiadającą funkcji (2.106)

$$g(y) = f\left(\frac{y-2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3}. \quad (2.108)$$

Zatem postać rozkładu się nie zmienia, zmienia się natomiast argument w funkcji f , mianowicie argument x jest zastąpiony przez $\frac{y-2}{3}$.

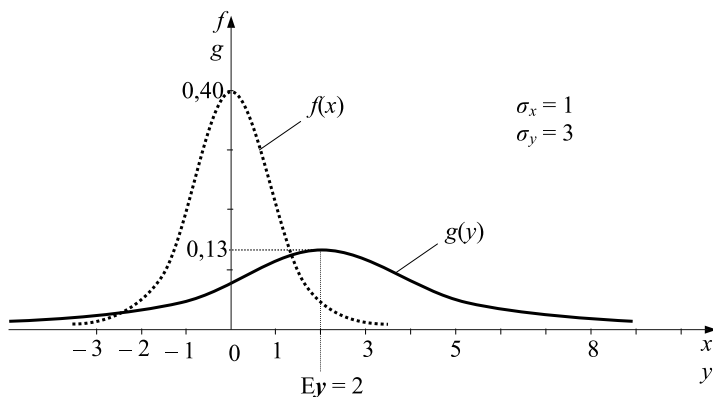
Ponieważ gęstość $f(x)$ zmiennej x ma postać (2.107), więc gęstość zmiennej y , zgodnie z wyrażeniem (2.108), ma postać

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-2}{3}\right)^2}{2}} \cdot \frac{1}{3}.$$

Po przekształceniach uzyskujemy inną formę tego wzoru, mianowicie

$$g(y) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-2)^2}{2 \cdot 3^2}}.$$

Wynika z niej, że zmienna y ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej $Ey = 2$ i odchyleniu standardowym $\sigma = 3$. Uzyskany rezultat jest zilustrowany na rysunku 2.28.



Rys. 2.28. Gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej x i zmiennej losowej y

PRZYKŁAD 2.22

Dwie wielkości traktowane jako zmienne losowe są związane funkcją o postaci

$$y = x^2 \quad (2.109)$$

przy czym zmienna x ma rozkład normalny o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2.110)$$

i parametrach: $Ex = 0$, $\sigma = 1$. Należy wyznaczyć postać gęstości zmiennej losowej y .

Rozwiązanie

Zauważmy, że funkcja (2.109), czyli funkcja ψ , nie jest monotoniczna. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej y określimy więc inaczej niż w poprzednim przykładzie, ponieważ wzór (2.105) jest słuszny w przypadku funkcji monotonicznych. Najpierw wyznaczmy dystrybuantę, a następnie gęstość. Dystrybuan- ta ta wynosi

$$Q_y(y) = P\{y \leq y\} = P\{x^2 \leq y\} = P\{-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}\} = Q_x(\sqrt{y}) - Q_x(-\sqrt{y}).$$

Zatem gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej y

$$g(y) = \frac{dQ_y(y)}{dy} = \frac{dQ_x(\sqrt{y})}{dy} - \frac{dQ_x(-\sqrt{y})}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} f(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f(-\sqrt{y}). \quad (2.111)$$

Po wprowadzeniu do tego wyrażenia wzoru (2.110) otrzymujemy poszukiwaną gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej y

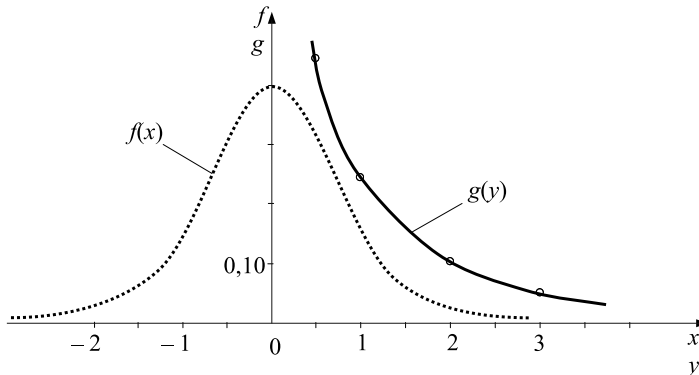
$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, \quad (2.112)$$

dla $y > 0$, a w przedziale $y \leq 0$ funkcja $g(y) = 0$. Z postaci funkcji (2.112) wynika, że w przedziale wartości $y > 0$ jest to funkcja malejąca (rys. 2.29).

Łatwo można też sprawdzić, że wyrażenie (2.5)

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy = 1,$$

w odniesieniu do funkcji (2.112) jest spełnione, co potwierdza, iż funkcja ta jest gęstością prawdopodobieństwa (uwaga: potrzebne w tym sprawdzeniu całkowanie można uprościć, wykonując podstawienie $u = \sqrt{y}$).



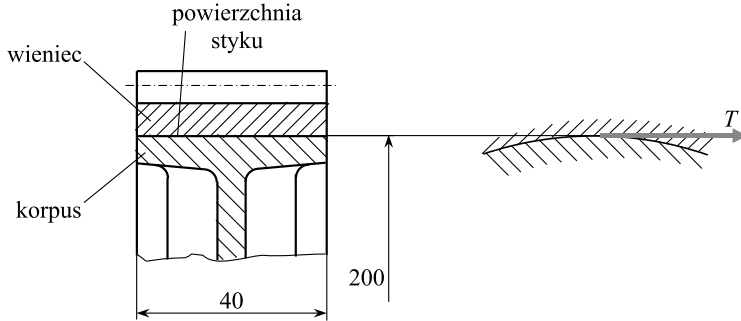
Rys. 2.29. Gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej x i zmiennej losowej y

PRZYKŁAD 2.23

W połączeniu skurczowym wieńca koła zębatego z korpusem koła (rys. 2.30) obciążenie w postaci momentu obrotowego jest przenoszone między tymi częściami koła dzięki obwodowej sile tarcia T rozwijanej na ich wspólnej powierzchni. Siła ta jest określana za pomocą wzoru

$$T = \mu A p, \quad (2.113)$$

gdzie: μ – współczynnik tarcia na wspólnej powierzchni, A – pole powierzchni styku obu elementów, p – naciski jednostkowe powstałe na tej powierzchni po obkurczeniu się ogrzanego wieńca na korpusie koła w wyniku wyrównania temperatur.



Rys. 2.30. Połączenie cierne dwóch elementów koła zębatego

Współczynnik tarcia ma duże rozrzuty losowe opisane w przybliżeniu za pomocą rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej i odchyleniu standardowym równym odpowiednio: $m = 0,13$, $\sigma = 0,01$. Przy założeniu, że wielkości A i p są zdeterminowane i wynoszą: $A = 25,12 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$, $p = 1 \text{ MPa}$, należy znaleźć rozkład prawdopodobieństwa siły tarcia w połączeniu ciernym.

Rozwiązanie

Z treści przykładu wynika, że współczynnik tarcia jest traktowany jako zmienna losowa μ o gęstości prawdopodobieństwa

$$f(\mu) = \frac{1}{0,01\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu-0,13)^2}{2 \cdot 0,01^2}}. \quad (2.114)$$

Siła tarcia T na powierzchni styku połączonych elementów jest więc również zmienną losową, związaną ze zmienną μ funkcją

$$T = \mu A p. \quad (2.115)$$

Jest to funkcja monotoniczna, zatem rozkład zmiennej losowej T możemy określić przy użyciu wyrażenia (2.105). Aby tego dokonać znajdujemy funkcję odwrotną do funkcji (2.113)

$$\mu = \frac{T}{A p}$$

oraz jej pochodną względem T

$$\frac{d\mu(T)}{dT} = \frac{1}{A p}.$$

Zatem, zgodnie z wyrażeniem (2.105), gęstość zmiennej T ma ogólną postać

$$g(T) = f\left(\frac{T}{A p}\right) \cdot \frac{1}{A p}.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy wyrażenie (siła T jest w nim określana w kN)

$$g(T) = f\left(\frac{T}{25,12 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3}}\right) \cdot \frac{1}{25,12 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3}} =$$

$$= \frac{1}{25,12} f\left(\frac{T}{25,12}\right) \left[\frac{1}{\text{kN}}\right].$$

Zatem postać funkcji g jest taka jak funkcji f , czyli zmienna losowa T ma rozkład normalny. Zmienia się natomiast argument w funkcji f , mianowicie argument μ należy zastąpić przez $T/25,12$. Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej T przybiera więc formę

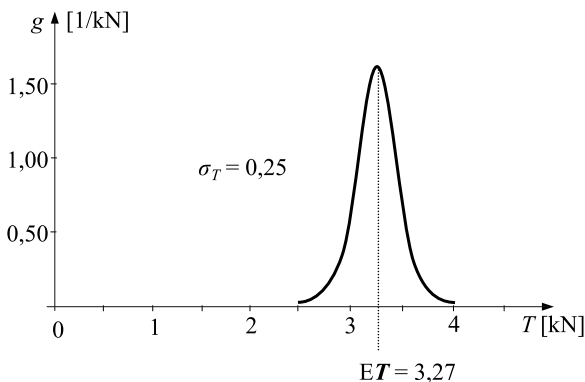
$$g(T) = \frac{1}{25,12} \cdot \frac{1}{0,01\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{T}{25,12} - 0,13\right)^2}{2 \cdot 0,01^2}} \quad [1/\text{kN}],$$

której po uporządkowaniu (i zaokrągleniach) nadajemy postać

$$g(T) = \frac{1}{0,25\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(T-3,27)^2}{2 \cdot 0,25^2}} \quad [1/\text{kN}].$$

Z tak wyprowadzonego wzoru wynika, że siła tarcia T na powierzchni styku łączonych elementów ma rozkład normalny o parametrach: $ET = 3,27$ kN, $\sigma_T = 0,25$ kN.

W celu zilustrowania takiego rezultatu sporządzmy jeszcze wykres gęstości $g(T)$. Jest on pokazany na rysunku 2.31. Uzyskany rezultat w postaci rozkładu prawdopodobieństwa siły tarcia w połączeniu ciernym może być wykorzystany do analizy niezawodności połączenia pod wpływem zewnętrznej siły, mogącej doprowadzić do względnego poślizgu połączonych elementów.



Rys. 2.31. Gęstość prawdopodobieństwa siły tarcia w połączeniu ciernym dwóch elementów

PRZYKŁAD 2.24

Dominującym zjawiskiem fizycznym prowadzącym do niesprawności łożyska ślizgowego jest zużycie cierne panewki, objawiające się powiększaniem luzu między powierzchnią wewnętrzną panewki i powierzchnią czopa wałka. Matematyczny model przyrostu Δ luzu ma postać

$$\Delta = cvpt, \quad (2.116)$$

gdzie: c – współczynnik charakteryzujący podatność na zużycie cierne materiału panewki, v – prędkość poślizgu czopa wałka w stosunku do panewki, p – uśrednione naciski na powierzchni panewki, t – czas funkcjonowania łożyska. Przy założeniu, że wielkości Δ , v i p są zdeterminowane i znane, a współczynnik podatności c ma istotne rozrzuty losowe opisane za pomocą rozkładu normalnego o znanej wartości oczekiwanej m i odchyleniu standardowym σ , należy określić rozkład czasu t poprawnego funkcjonowania łożyska ślizgowego.

Rozwiązanie

Z modelu o postaci (2.116) przyrostu luzu w łożysku wynika, że związek między zmienną losową t i zmienną losową c ma postać

$$t = \frac{\Delta}{cvp}. \quad (2.117)$$

Przyjmujemy, że współczynnik c ma wartości dodatnie, a ucięcie rozkładu tej zmiennej losowej w zerze nie ma praktycznego znaczenia. Rozkład tej zmiennej losowej określimy przy użyciu wyrażenia (2.105). Wcześniej w celu uproszczenia zapisu wprowadźmy oznaczenie

$$\frac{\Delta}{vp} \equiv A. \quad (2.118)$$

Zatem związek (2.117) zapisujemy w formie (zdeterminowanej)

$$t = \frac{A}{c}. \quad (2.119)$$

Aby skorzystać z wyrażenia (2.105), znajdujemy funkcję odwrotną do funkcji (2.119)

$$c = \frac{A}{t}$$

oraz jej pochodną względem t

$$\frac{dc(t)}{dt} = -\frac{A}{t^2}.$$

Zgodnie z wyrażeniem (2.105), gęstość zmiennej t ma więc ogólną postać

$$g(t) = f\left(\frac{A}{t}\right) \cdot \frac{A}{t^2}.$$

Funkcja f określa gęstość rozkładu normalnego wyrażoną przez wzór (2.16). Korzystając z tego wzoru, nadajemy gęstości zmiennej t postać

$$g(t) = \frac{A}{t^2} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{A}{t} - m\right)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.120)$$

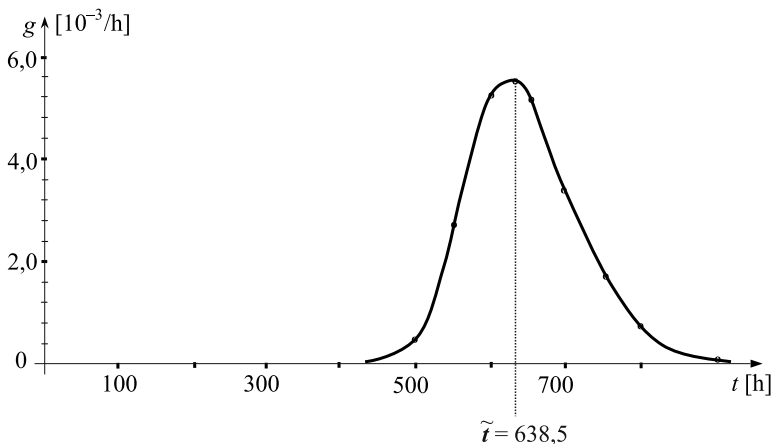
Postać ta jest nietypowa, dlatego po wyznaczeniu kilku wartości funkcji $g(t)$ spróbujemy ją zilustrować. Jednak, aby tego dokonać, przyjmijmy do obliczeń szacunkowe dane dotyczące wielkości występujących w wyrażeniu (2.120). Na podstawie informacji literaturowych możemy założyć, że $m = 1,3 \cdot 10^{-16} \text{ m}^2/\text{N}$, a $\sigma = 0,15 \cdot 10^{-16} \text{ m}^2/\text{N}$. Wielkość A oszacowana w odniesieniu do pewnego łożyska ślizgowego wynosi $A = 8,3 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2 \cdot \text{h}/\text{N}$. Po podstawieniu tych szacunkowych danych do wyrażenia (2.120) przybiera ono formę

$$g(t) = \frac{2210}{t^2} \cdot e^{-\frac{\left(\frac{830}{t} - 1,3\right)^2}{0,045}} \quad [1/\text{h}].$$

Przy jego użyciu wyznaczamy kilka wartości funkcji g (tab. 2.6) i na tej podstawie sporządzamy rysunek 2.32. Jak widać na rysunku, rozkład trwałości analizowanego łożyska ślizgowego jest lekko niesymetryczny, a różnica między największymi i najmniejszymi realizacjami zmiennej losowej t jest duża.

Tabela 2.6. Wyniki obliczeń gęstości prawdopodobieństwa $g(t)$

t [h]	500	550	600	638,5	650	700	750	800	900
$g(t)$ [$10^{-3}/\text{h}$]	0,50	2,75	5,26	5,42	5,17	3,37	1,71	0,75	0,11



Rys. 2.32. Gęstość prawdopodobieństwa trwałości łożyska ślizgowego

FUNKCJE WIELU ZMIENNYCH LOSOWYCH

W praktyce analiz inżynierskich spotykane są sytuacje, gdy na analizowaną wielkość z wpływ ma więcej niż jedna wielkość, np. x, y, \dots , o względnie dużych rozrzutach losowych. Jeśli chce się uwzględnić wpływ na wielkość z także tych rozrzutów, to należy określić funkcję $\mathbf{z} = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots)$ i znaleźć jej rozkład, np. gęstość prawdopodobieństwa $g(z)$. W literaturze dotyczącej zagadnień probabilistyki są prezentowane metody umożliwiające wyprowadzanie w takich przypadkach wzorów na gęstość $g(z)$. W niniejszym opracowaniu ograniczymy się do najprostszych przypadków funkcji $\mathbf{z} = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots)$, ale często spotykanych w praktyce, szczególnie inżynierskiej.

Taką funkcją ψ , najbardziej popularną w opracowaniach z zakresu probabilistyki i najobszerniej opisywaną, jest suma zmiennych losowych niezależnych o postaci

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}. \quad (2.121)$$

Pojęcie zależności między zmiennymi losowymi i ich wpływu na rozkłady funkcji zmiennych losowych jest wyjaśnione w dalszym tekście.

Relacji o postaci (2.121) jest w inżynierii mechanicznej dużo. Wielkość \mathbf{z} może być na przykład:

- całkowitą stratą energii przy jej przepływie przez dwa (lub więcej) zespoły mechaniczne,
- sumą obciążeń lub naprężeń,
- całkowitym czasem funkcjonowania obiektu złożonego z elementu podstawowego i elementu rezerwowego,
- zapasem wytrzymałości elementu mechanicznego, rozumianym jako różnica między wytrzymałością materiału elementu i panującym w nim naprężeniem albo jako różnica między siłą niszczącą element i siłą ten element obciążającą itd.

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej \mathbf{z} jest nazywany kompozycją lub splotem rozkładów zmiennych $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$. Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej \mathbf{z} można wyznaczyć przy użyciu wyrażenia

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_y(z-x) dx,$$

lub

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_y(y) f_x(z-y) dy, \quad (2.122)$$

gdzie f_x i f_y to symbole gęstości prawdopodobieństwa zmiennych \mathbf{x} i \mathbf{y} . Jeśli składników zmiennej \mathbf{z} jest więcej niż 2, rozkład jej można uzyskać na przykład przez kolejne stosowanie jednego ze wzorów (2.122).

Inny sposób, choć zbliżony do ujętego wzorami (2.122), polega na wcześniejszym wyznaczeniu dystrybuanty zmiennej z przy użyciu wyrażenia

$$Q(z) = \int_{-\infty}^z f_x(x) \left[\int_{-\infty}^{z-x} f_y(u) du \right] dx,$$

lub

(2.123)

$$Q(z) = \int_{-\infty}^z f_y(y) \left[\int_{-\infty}^{z-y} f_x(u) du \right] dy,$$

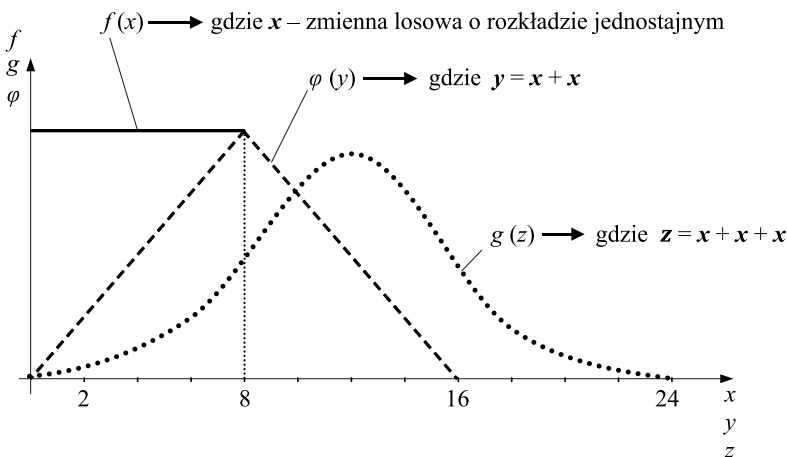
a następnie gęstości jako pochodnej dystrybuanty.

Korzystając ze wzorów (2.122) lub (2.123), można udowodnić, że suma niezależnych zmiennych losowych o rozkładach normalnych ma także rozkład normalny. To jeden z niewielu rozkładów mających taką szczególną cechę.

Z funkcją (2.121) wiąże się ważne w probabilistyce i w praktyce tak zwane **centralne twierdzenie graniczne**. Przy pewnych założeniach można je sformułować na przykład następująco:

suma niezależnych zmiennych losowych ma rozkład asymptotycznie normalny.

Oznacza to w praktyce, że kompozycja n rozkładów zdąży do rozkładu normalnego wraz ze wzrostem liczby n składników kompozycji. Na poglądowym rysunku 2.33 pokazane jest, że to zbliżanie się do rozkładu normalnego sumy zmiennych losowych, nawet tak różnych od rozkładu normalnego, jak rozkład jednostajny, jest szybkie. W praktyce można zatem przyjmować, że suma już 3 lub 4 niezależnych zmiennych losowych ma w przybliżeniu rozkład normalny.



Rys. 2.33. Przykład zbieżności rozkładu sumy zmiennych losowych do rozkładu normalnego

Postać funkcji $\mathbf{z} = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots)$ stosowana w praktyce analiz ilościowych, zwłaszcza analiz inżynierskich, raczej rzadko bywa bardziej złożona niż postać (2.121). W obszarze inżynierii mechanicznej są to na przykład funkcje:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x}\mathbf{y}, \quad (2.124)$$

lub

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} \quad (2.125)$$

Przykładem funkcji (2.124) może być zależność między siłą tarcia (\mathbf{z}) na granicy dwóch elementów a siłą (\mathbf{x}) ich wzajemnego oddziaływania na siebie oraz współczynnikiem tarcia (\mathbf{y}), o postaci $\mathbf{T} = \mu\mathbf{P}$.

Przykładem funkcji (2.125) może być zależność między trwałością zmęczeniową (\mathbf{z}) elementu urządzenia a granicą zmęczenia (\mathbf{x}) materiału elementu oraz maksymalnymi zmiennymi naprężeniami (\mathbf{y}), o postaci $\mathbf{N} = \mathbf{Z}^n \mathbf{N}_{\text{gr}} / \boldsymbol{\tau}^n$, przy czym \mathbf{N} to trwałość zmęczeniowa jako funkcja granicy zmęczenia \mathbf{Z} i zmiennych naprężeń o wartości maksymalnej $\boldsymbol{\tau}$, a \mathbf{N}_{gr} i współczynnik n to wielkości charakteryzujące wykres zmęczeniowy materiału elementu.

W każdej z postaci (2.121), (2.124) i (2.125) funkcji $\mathbf{z} = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots)$ zakładamy, że znane są gęstości prawdopodobieństwa zmiennych losowych, od których zależy zmienna \mathbf{z} , a poszukujemy rozkładu zmiennej \mathbf{z} , np. w postaci jej gęstości prawdopodobieństwa $g(\mathbf{z})$.

Gęstość prawdopodobieństwa zmiennych \mathbf{z} określonych przez funkcje (2.124) i (2.125) można znaleźć na przykład przy użyciu wzorów [3, 5]:

– w odniesieniu do pierwszej z nich (czyli będącej iloczynem zmiennych losowych)

$$g(\mathbf{z}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(\mathbf{x}) f_y\left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{x}}\right) \cdot \frac{1}{|\mathbf{x}|} d\mathbf{x}, \quad (2.126)$$

przy czym $\mathbf{x} \neq 0$,

– w odniesieniu do drugiej (czyli będącej ilorazem zmiennych losowych)

$$g(\mathbf{z}) = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{y}| f_x(\mathbf{y}\mathbf{z}) f_y(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (2.127)$$

Wyznaczanie przy użyciu tych wzorów funkcji $g(\mathbf{z})$ jest często dość złożone, dlatego w praktyce inżynierskiej poszukuje się przybliżonych postaci gęstości $g(\mathbf{z})$. Dokonuje się tego na przykład poprzez linearyzację funkcji $\mathbf{z} = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots)$ i sprowadzanie jej do postaci (2.121). Niedokładności wynikające z takiego przybliżenia są tym mniejsze, im mniejsze są losowe rozrzuty zmiennych $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$

Uwaga: Alternatywną metodą poszukiwania przybliżonych postaci gęstości $g(\mathbf{z})$ jest metoda symulacyjna (metoda symulacji), która jest szczególnie popularna w przypadku korzystania ze specjalistycznego pakietu obliczeń statystycznych. Metoda ta polega na wielokrotnym losowaniu (np. przy

użyciu programu Excel) realizacji zmiennych losowych x, y, \dots z ich założonych rozkładów i obliczaniu wartości zmiennej losowej z przy użyciu wyrażenia $z = \psi(x, y, \dots)$. Otrzymany metodą symulacji zbiór wartości zmiennej z może być wykorzystany do analiz w identyczny sposób, jak wyniki pomiarów otrzymane z rzeczywistego eksperymentu, np. do statystycznego określania poszukiwanych jej parametrów (patrz podrozdz. 5.2).

Dostatecznie duży zbiór otrzymanych wartości z może być wykorzystany do sporządzenia odpowiedniego histogramu oraz dopasowaniu przybliżonego przebiegu krzywej gęstości prawdopodobieństwa i wskazania postaci matematycznej rozkładu zmiennej z (patrz podrozdz. 2.1). Bardziej precyzyjny dobór postaci matematycznej wymaga znajomości testów zgodności, co jednak wykracza poza założony program niniejszego skryptu.

Autorzy zachęcają czytelnika do bliższego zaznajomienia się z praktyką metody symulacji, ograniczając się w niniejszym skrypcie tylko do podania wstępnych wskazówek umożliwiających rozwiązanie tą metodą jednego z przykładów (patrz przykład 2.28).

Zmienne losowe uwzględniane w analizach, np. inżynierskich, mogą być między sobą wzajemnie zależne. Przykładami istnienia zależności między zmiennymi mogą być:

- masa i wzrost człowieka,
- obciążenie i odkształcenie elementu maszyny,
- czas między uszkodzeniami łożysk podpierających oś w samochodzie,
- obciążenia dwóch łożysk podpierających wał maszyny.

Zmienna y jest niezależna od zmiennej x , jeśli rozkład zmiennej y nie zależy od wartości x , którą może przybrać druga z nich. Matematycznie można to zapisać w postaci relacji

$$g(y|x) = g(y), \quad (2.128)$$

śluszonej dla dowolnej wartości x . Symbol $g(y|x)$ oznacza warunkową gęstość zmiennej y , określoną dla wartości x (np. x_1) zmiennej x .

Cecha niezależności określona przez relację (2.128) jest przedstawiona w sposób poglądowy na rysunku 2.34.

Zmienna losowa y jest zależna od zmiennej losowej x , jeśli zrealizowana wartość zmiennej x ma wpływ na rozkład zmiennej y , czyli

$$g(y|x) \neq g(y). \quad (2.129)$$

Można tę cechę zilustrować na przykład tak, jak na rysunku 2.35.

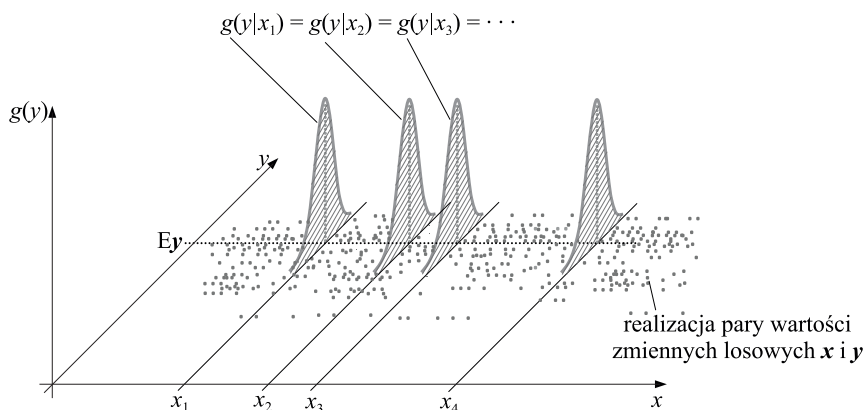
W praktyce często pomija się zależności między zmiennymi losowymi, gdyż ich „siła” jest w większości przypadków względnie mała, a decyzja taka ułatwia analizy. Jeśli te zależności są jednak na tyle silne, że chcemy je w modelach obliczeniowych i analizach uwzględniać, to wówczas można tego dokonać na przykład przy użyciu **współczynnika korelacji**. Ta jedna z prostszych miar, określająca w sposób przybliżony zależności między dwoma zmiennymi losowymi x i y , jest definiowana przez wyrażenie

$$\rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (2.130)$$

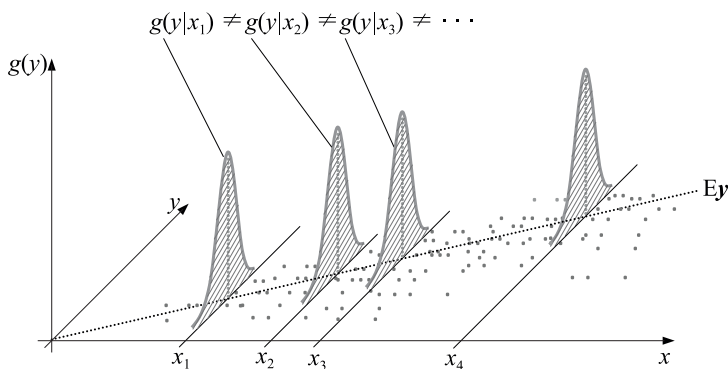
gdzie: σ_x i σ_y – odchylenia standardowe obu zmiennych, $\text{cov}(x, y)$ – kowariancja tych zmiennych. Kowariancja wyraża się przez inne wielkości następująco:

$$\text{cov}(x, y) = E(xy) - ExEy, \quad (2.131)$$

przy czym Ex , Ey i $E(xy)$ to wartości oczekiwane zmiennych oraz ich iloczynu.



Rys. 2.34. Ilustracja niezależności zmiennej losowej y od zmiennej losowej x (np. siły P obciążającej element maszyny od granicy wytrzymałości R_m materiału elementu)



Rys. 2.35. Przykład zależności zmiennej losowej y od zmiennej losowej x (np. masy m ciała człowieka od jego wzrostu H)

Wartości współczynnika korelacji są zawarte w przedziale

$$-1 \leq \rho \leq 1.$$

Im jest większa wartość $|\rho|$, tym zależność między zmiennymi losowymi jest silniejsza, a w granicznym przypadku, gdy $\rho = \pm 1$, cała „masa prawdopodobieństwa” jest skoncentrowana na prostej $y = ax + b$, przy czym a i b są zdeterminowanymi wielkościami.

Zależność między zmiennymi x i y wpływa głównie na rozmiar rozrzutu losowego zmiennej z , będącej funkcją tych zmiennych, okreśłany na przykład przez odchylenie standardowe σ_z .

WŁAŚCIWOŚCI PARAMETRÓW FUNKCJI ZMIENNYCH LOSOWYCH

Warto jeszcze przytoczyć właściwości parametrów wybranych zmiennych losowych, które są funkcjami innych zmiennych losowych. Zatem, wartość oczekiwana i odchylenie standardowe

- wielkości zdeterminowanej c :

$$Ec = c, \quad \sigma_c = 0; \quad (2.132)$$

- funkcji liniowej jednej zmiennej losowej:

$$E(cx) = cEx, \quad \sigma_{cx} = c\sigma_x; \quad (2.133)$$

- sumy zmiennych losowych:

$$E(x \pm y) = Ex \pm Ey, \quad \sigma_{x \pm y} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 \pm 2\rho\sigma_x\sigma_y}; \quad (2.134)$$

- iloczynu zmiennych losowych niezależnych:

$$E(xy) = Ex \cdot Ey \quad (2.135)$$

Takie i inne parametry bardziej złożonych funkcji zmiennych losowych można wyznaczać, korzystając ze wzorów definiujących te parametry, np. wzorów (2.10)–(2.12).

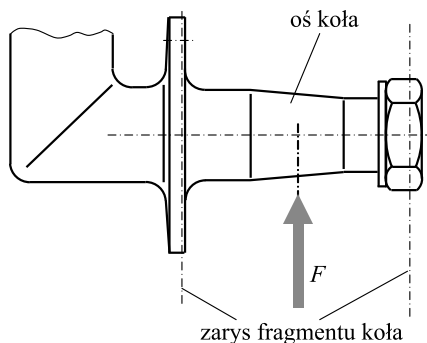
PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 2.25

W fazie lądowania samolotu zdarza się czasami tak zwane twarde lądowanie. Naprężenia maksymalne σ w osi koła podwozia (rys. 2.36) mogą wówczas przekroczyć granicę R_m wytrzymałości doraźnej materiału osi, co oznacza jej zniszczenie.

Na podstawie odpowiednich pomiarów stwierdzono, że naprężenia σ mają duże rozrzuty losowe (w kolejnych tego typu lądowaniach), a ich rozkład prawdopodobieństwa jest normalny z parametrami: wartość oczekiwana $E\sigma = 950$ MPa, wariancja $V\sigma = 95^2$ (MPa)². Granica R_m wytrzymałości materiału osi ma także rozkład normalny o parametrach: $ER_m = 1715$ MPa, $VR_m = 170^2$ (MPa)². Nale-

ży wyznaczyć prawdopodobieństwo r niezniszczenia osi podwozia przy jednym twardym lądowaniu.



Rys. 2.36. Siła obciążająca oś podwozia helikoptera

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że warunkiem niezniszczenia osi podczas twardego lądowania jest dodatni znak zapasu wytrzymałości Δ , określonego przez relację

$$\Delta = R_m - \sigma, \quad (2.136)$$

czyli spełnienie relacji

$$\Delta > 0. \quad (2.137)$$

Prawdopodobieństwo spełnienia warunku (2.137) jest poszukiwanym prawdopodobieństwem r niezniszczenia osi podwozia w rezultacie jednego twardego lądowania. Zatem

$$r = P\{\Delta > 0\}. \quad (2.138)$$

Możemy je wyznaczyć, opierając się na przykład na wyrażeniu (2.6). Zgodnie z nim

$$r = 1 - Q(0), \quad (2.139)$$

gdzie $Q(0)$ jest dystrybuantą zmiennej losowej Δ określoną dla wartości $\Delta = 0$. Aby tę dystrybuantę wyznaczyć, należy wcześniej określić rozkład zmiennej Δ . W tym celu oprzemy się bezpośrednio na podanym wcześniej stwierdzeniu, że zmienna losowa określona przez wyrażenie (2.136) ma rozkład normalny o parametrach podanych za pomocą wzorów (2.134).

Obie zmienne losowe, tzn. R_m i σ , mają rozkłady normalne o postaci określonej przez wzór (2.16). Zakładamy, że wpływ ucięć w zerze tych rozkładów jest do pominięcia (łatwo można to udowodnić) oraz że zmienne te są wzajemnie niezależne, czyli współczynnik korelacji $\rho = 0$.

Do wyznaczenia dystrybuanty $Q(0)$ użyjemy gotowych tablic wartości dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego zmiennej losowej y , której związek ze zmienną Δ , zgodnie z wyrażeniem (2.18), ma postać

$$y = \frac{\Delta - E\Delta}{\sqrt{V\Delta}},$$

przy czym, zgodnie ze wzorami (2.134)

$$E\Delta = ER_m - E\sigma = 1715 - 950 = 765 \text{ MPa},$$

$$V\Delta = VR_m + V\sigma = 170^2 + 95^2 = 195^2 \text{ (MPa)}^2.$$

Zatem

$$y = \frac{\Delta - 765}{195}.$$

Ze wzoru (2.22) wynika, że poszukiwana dystrybuanta $Q(0)$ zmiennej Δ może być wyznaczona przy użyciu wyrażenia

$$Q(0) = \Phi\left(\frac{0 - 765}{195}\right) = \Phi(-3,92).$$

Z tablicy wartości dystrybuanty $\Phi(y)$ standaryzowanego rozkładu normalnego zamieszczonej w pozycji [5] (także w Załączniku 1 i w internecie) można odczytać wartość $\Phi(3,92) = 0,9999557$. Przy użyciu wyrażenia (2.23) wyznaczamy

$$\Phi(-3,92) = 1 - \Phi(3,92) = 0,0000443.$$

Zatem zgodnie z wyrażeniem (2.139) otrzymujemy

$$r = 1 - Q(0) = 1 - 0,0000443 = 0,9999557,$$

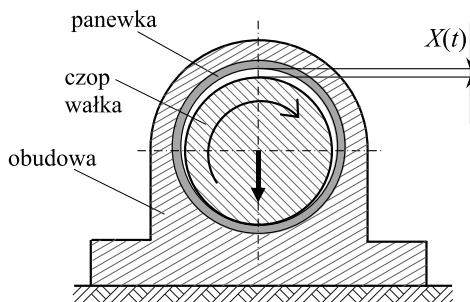
co było celem przykładu.

PRZYKŁAD 2.26

Walek pewnego urządzenia mechanicznego jest podparty dwoma jednakowymi łożyskami ślizgowymi jednakowo obciążonymi (rys. 2.37). Powiększanie się luzu w każdym z nich opisuje funkcja

$$X(t) = X_o + vt, \quad (2.140)$$

w której: X_o – luz początkowy, v – prędkość zużywania się współpracujących elementów, t – czas funkcjonowania łożyska.



Rys. 2.37. Łożysko ślizgowe

Zmienne losowe X_o i ν mają rozkłady normalne o parametrach: $EX_o = 100 \mu\text{m}$, $VX_o = 100 (\mu\text{m})^2$, $E\nu = 0,05 \mu\text{m/h}$, $V\nu = 2 \cdot 10^{-4} (\mu\text{m/h})^2$. Graniczna wartość luzu, po której przekroczeniu łożysko traktuje się jako uszkodzone, $X_{kr} = 220 \mu\text{m}$. Należy:

- 1) wyznaczyć taki czas t funkcjonowania łożyska, by prawdopodobieństwo jego uszkodzenia nie przekroczyło 5%,
- 2) sporządzić przybliżony przebieg wykresu gęstości prawdopodobieństwa luzu $X(t)$, który może powstać w łożysku w wyniku jego funkcjonowania przez wyznaczony okres t .

Rozwiązanie

Ad 1) Wymaganie sformułowane w treści przykładu można zapisać w formie relacji

$$P\{X(t) > X_{kr}\} = 0,05,$$

w której poszukiwaną wielkością jest czas t , lub w postaci wygodniejszej do obliczeń

$$P\{X(t) \leq X_{kr}\} = 0,95. \quad (2.141)$$

Lewa strona relacji (2.141) to dystrybuenta $Q(X)$ zmiennej losowej $X(t) \equiv X$ (dla określonego czasu t), zatem możemy ją przedstawić także w postaci

$$Q(X_{kr}) = 0,95, \quad (2.142)$$

przy czym $X_{kr} = 220 \mu\text{m}$.

Jak wynika z wyrażenia (2.140), zmienna losowa X zależy od dwóch innych zmiennych losowych, mianowicie od: zmiennej X_o o rozkładzie normalnym i znanych parametrach oraz od zmiennej losowej νt o rozkładzie normalnym i parametrach: $E(\nu t) = tE\nu$, $V(\nu t) = t^2 V\nu$. Zakładamy, że zmienne losowe X_o i ν są

wzajemnie niezależne. Jako suma zmiennych losowych o rozkładach normalnych zmienna X ma także rozkład normalny o gęstości prawdopodobieństwa

$$g(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot VX}} e^{-\frac{(X-EX)^2}{2VX}} \quad (2.143)$$

i parametrach

$$EX = EX_o + E(vt) = EX_o + t \cdot E v = 100 + 0,05t \text{ } \mu\text{m}, \quad (2.144)$$

$$VX = VX_o + V(vt) = VX_o + t^2 \cdot Vv = 100 + 2 \cdot 10^{-4} t^2 \text{ } (\mu\text{m})^2. \quad (2.145)$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, do wyznaczenia dystrybuanty $Q(X_{kr})$, występującej w warunku (2.142), użyjemy gotowych tablic wartości dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego zmiennej losowej y , która zgodnie z wyrażeniem (2.18) przybiera postać

$$y = \frac{X - EX}{\sqrt{VX}}.$$

Ze wzoru (2.22) wynika, że poszukiwana dystrybuanta $Q(X_{kr})$ zmiennej X wynosi

$$Q(X_{kr}) = \Phi\left(\frac{X_{kr} - EX}{\sqrt{VX}}\right) = \Phi\left(\frac{220 - 100 - 0,05t}{\sqrt{100 + 2 \cdot 10^{-4} t^2}}\right) = \Phi\left(\frac{120 - 0,05t}{\sqrt{100 + 2 \cdot 10^{-4} t^2}}\right).$$

Po podstawieniu tego rezultatu do warunku (2.142) uzyskujemy

$$\Phi\left(\frac{120 - 0,05t}{\sqrt{100 + 2 \cdot 10^{-4} t^2}}\right) = 0,95.$$

Z tablic standaryzowanego rozkładu normalnego odczytujemy, że argument y , dla którego związek ten jest spełniony, wynosi

$$\frac{120 - 0,05t}{\sqrt{100 + 2 \cdot 10^{-4} t^2}} = 1,65.$$

Jest to równanie z niewiadomą t . Jego rozwiązanie prowadzi do realnego wyniku $t = 1590$ h (drugi wynik należy odrzucić jako nierealny, np. na podstawie odpowiadającej mu wartości EX).

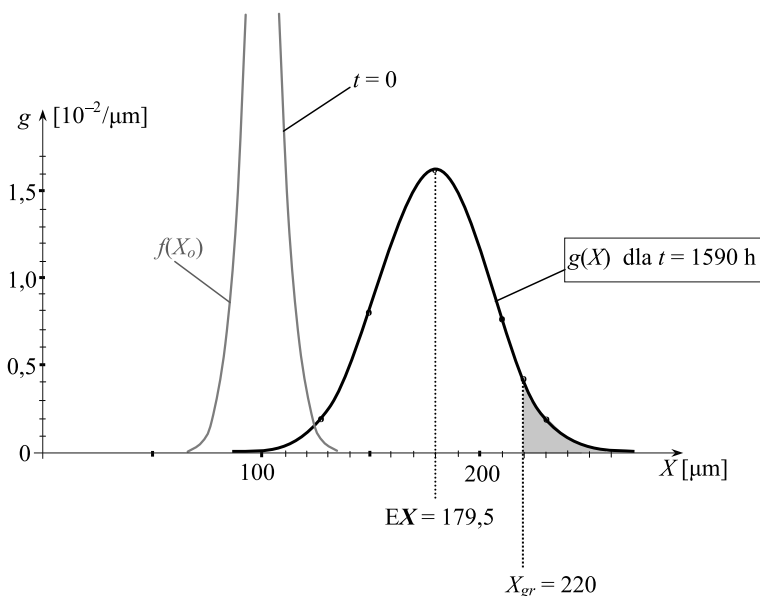
Ad 2) Luz w łożysku zaistniały w czasie $t = 1590$ h jest zmienną losową $X(1590)$ o rozkładzie normalnym i parametrach określonych przez wzory (2.144) i (2.145), czyli wynoszących

$$EX = 100 + 0,05 \cdot 1590 = 179,5 \text{ } \mu\text{m},$$

$$VX = 100 + 2 \cdot 10^{-4} \cdot 1590^2 = 605,6 \text{ } (\mu\text{m})^2,$$

$$\sigma_X = \sqrt{VX} = 24,6 \text{ } \mu\text{m}.$$

Wykres gęstości prawdopodobieństwa $g(X)$ tego luzu sporządzamy po wyznaczeniu przy użyciu wzoru (2.143) kilku wartości tej funkcji. Jest on zamieszczony na rysunku 2.38. Dodatkowo na rysunku tym jest przedstawiony fragment wykresu gęstości prawdopodobieństwa $f(X_0)$ luzu w łożysku w chwili początkowej, czyli luzu początkowego.



Rys. 2.38. Rozkład luzu w łożysku ślizgowym w chwili początkowej i po czasie $t = 1590 \text{ h}$

PRZYKŁAD 2.27

W chwili wystąpienia uszkodzenia elementu podstawowego w pewnym urządzeniu elektronicznym włącza się automatycznie do funkcjonowania i zastępuje go w działaniu drugi taki sam element należący do tego urządzenia. Czasy poprawnego funkcjonowania obu elementów są jednakowymi zmiennymi losowymi τ o rozkładzie wykładniczym, przy czym parametr $\lambda = 0,030 \text{ 1/rok}$. Należy:

- 1) wyznaczyć gęstość prawdopodobieństwa $g(t)$ czasu t poprawnego funkcjonowania urządzenia,
- 2) po obliczeniu kilku wartości tej funkcji narysować wykres jej przebiegu.

Rozwiązanie

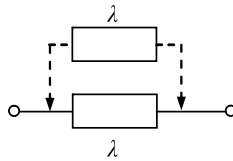
Ad 1) Działanie urządzenia, o którym mowa w treści przykładu, można przedstawić w formie umownego schematu, pokazanego na rysunku 2.39,

a czas t poprawnego funkcjonowania tego urządzenia – jako sumę dwóch zmiennych losowych τ

$$t = \tau + \tau. \quad (2.146)$$

Zakładamy, że zmienne losowe τ są wzajemnie niezależne. Wyznamy najpierw dystrybuantę $Q(t)$ zmiennej losowej t . Zastosujemy do tego jedno z wyrażeń (2.123), które w rozważanym przypadku przybierają postać

$$Q(t) = \int_0^t f_\tau(\tau) \left[\int_0^{t-\tau} f_\tau(u) du \right] d\tau. \quad (2.147)$$



Rys. 2.39. Schemat funkcyjowania urządzenia z elementem rezerwowym

Zmienna losowa τ ma rozkład wykładniczy o gęstości wyrażonej przez wzór (2.88), w analizowanym przypadku o postaci

$$f_\tau(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}. \quad (2.148)$$

Po podstawieniu tego wzoru do wyrażenia (2.147) i po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$Q(t) = \int_0^t \left[\int_0^{t-\tau} \lambda e^{-\lambda u} du \right] \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau = \int_0^t \left[1 - e^{-\lambda(t-\tau)} \right] \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau = 1 - (1 + \lambda t) e^{-\lambda t}.$$

Stąd gęstość prawdopodobieństwa zmiennej t wynosi

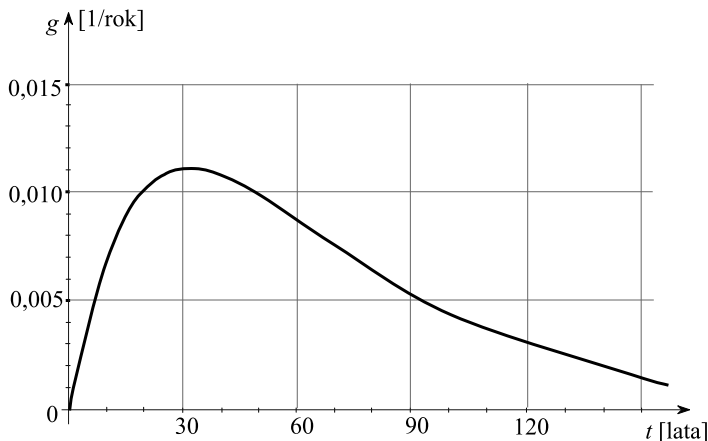
$$g(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \lambda^2 t e^{-\lambda t}. \quad (2.149)$$

Rozkład opisany przez tę funkcję jest jednym z rodzajów rozkładu gamma.

Ad 2) W celu narysowania wykresu gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej t wyznaczamy kilka jej wartości. Są one umieszczone w tabeli 2.7, a sporządzony na tej podstawie wykres jest przedstawiony na rysunku 2.40.

Tabela 2.7. Wyniki obliczeń gęstości prawdopodobieństwa $g(t)$

t [rok]	10	20	30	35	40	50	70	100	150
$g(t)$ [1/rok]	0,0067	0,0099	0,0110	0,0110	0,0108	0,0100	0,0077	0,045	0,0015



Rys. 2.40. Gęstość prawdopodobieństwa czasu poprawnego funkcjonowania urządzenia

PRZYKŁAD 2.28

Czas t poprawnego funkcjonowania urządzenia, o którym mowa w poprzednim przykładzie, jest zmienną losową o rozkładzie gamma określonym przez gęstość prawdopodobieństwa (2.149). Należy wyznaczyć: wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe zmiennej t oraz modę i medianę jej rozkładu. Potrzebne do tego dane zaczerpnąć z przykładu 2.27.

Rozwiązanie

Zmienna losowa t jest sumą niezależnych zmiennych losowych, określoną przez wyrażenie (2.146). Zatem, zgodnie ze wzorami (2.134) i (2.89) wartość oczekiwana i odchylenie standardowe zmiennej t wynoszą

$$Et = E\tau + E\tau = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda} = \frac{2}{0,030} = 66,67 \text{ lat},$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_\tau^2 + \sigma_\tau^2} = \sigma_\tau \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} = \frac{\sqrt{2}}{0,030} = 47,14 \text{ lat}.$$

Modę znajdziemy, korzystając z warunku

$$\frac{dg(t)}{dt} = 0, \quad (2.150)$$

gdzie $g(t)$ jest gęstością prawdopodobieństwa zmiennej t , określoną przez wzór (2.149) (rys. 2.40). Z warunku (2.150) wynika, że

$$\lambda^2 e^{-\lambda t} (1 - \lambda t) = 0.$$

Stąd moda

$$\tilde{t} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,030} = 33,33 \text{ lat.}$$

Medianę, zgodnie z jej definicją, znajdziemy z warunku

$$Q(t_{0,5}) = 0,5, \quad (2.151)$$

przy czym $Q(t)$ jest dystrybuantą zmiennej t . Lewa strona tego warunku

$$Q(t_{0,5}) = \int_0^{t_{0,5}} g(t) dt,$$

gdzie gęstość prawdopodobieństwa jest określona przez wzór (2.149). Zatem

$$Q(t_{0,5}) = \int_0^{t_{0,5}} \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt = \lambda^2 \int_0^{t_{0,5}} t e^{-\lambda t} dt.$$

Całka nieoznaczona

$$\int t e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \left(t + \frac{1}{\lambda} \right)$$

została już wyznaczona w przykładzie 2.17 przy okazji wyprowadzania wzoru (2.94). W rezultacie

$$Q(t_{0,5}) = \lambda^2 \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \left(t + \frac{1}{\lambda} \right) \right]_0^{t_{0,5}} = 1 - (1 + \lambda t_{0,5}) e^{-\lambda t_{0,5}}.$$

Po podstawieniu tego wyniku do warunku (2.151) otrzymujemy

$$(1 + \lambda t_{0,5}) e^{-\lambda t_{0,5}} = 0,5.$$

Stąd

$$\ln(1 + \lambda t_{0,5}) = \ln 0,5 + \lambda t_{0,5}. \quad (2.152)$$

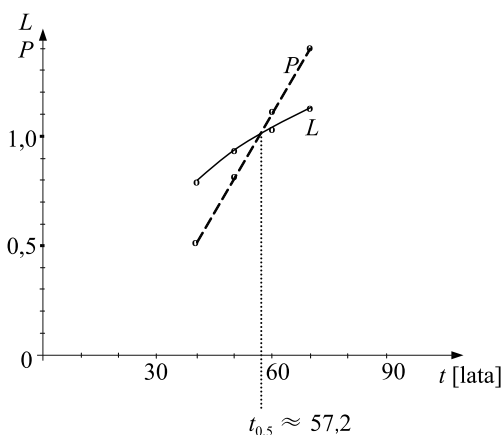
Po podstawieniu wartości $\lambda = 0,030$ do tego równania znajdujemy jego rozwiązanie metodą graficzną – jako współrzędną przecięcia wykresów jego lewej (L) i prawej (P) strony (rys. 2.41).

Wyznaczone parametry zmiennej losowej t (czasu poprawnego funkcjonowania urządzenia zawierającego element rezerwowy) są pokazane na rysunku 2.42 na tle wykresu gęstości prawdopodobieństwa tej zmiennej, sporządzonego w przykładzie 2.27.

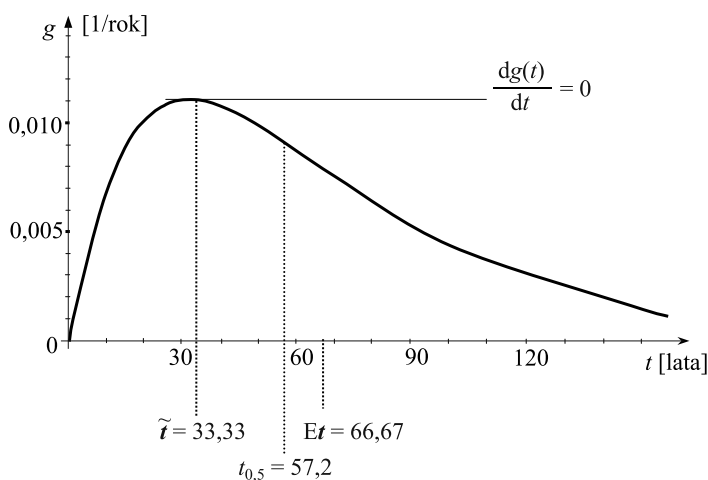
Uwaga: Przykład ten możemy rozwiązać także metodą symulacyjną, wykorzystując do tego celu program MS Excel. Zgodnie z treścią uwagi zamieszczonej na stronie 81, wielokrotnie dokonujemy losowania par wartości τ_1 oraz τ_2 i dla każdej pary obliczamy czas bezawaryjnej pracy całego urządzenia $t = \tau_1 + \tau_2$ (patrz wzór 2.146). Otrzymany zbiór wartości zmiennej t może być wykorzystany do analiz w identyczny sposób, jak wyniki pomiarów otrzymane z rzeczywistego eksperymentu, np. do statystycznego szacowania poszukiwanych jej parametrów – takich, jak wartość oczekiwana czy odchylenie standardowe zmiennej t (patrz podrozdz. 5.2).

Dostatecznie duży zbiór otrzymanych wartości z może być wykorzystany do sporządzenia odpowiedniego histogramu oraz dopasowaniu przybliżonego przebiegu krzywej gęstości prawdopodobieństwa i wskazania postaci matematycznej rozkładu zmiennej t . Wykracza to jednak poza wymagania analizowanego przykładu i poza założony program niniejszego skryptu.

W celu wspomnianego powyżej wylosowania wartości τ_1 (i podobnie τ_2) z rozkładu zmiennej losowej τ przy użyciu programu Excel, stosujemy komendę LOS znajdującą się w zakładce Formuły \rightarrow Matematyka i Tryg i generujemy liczbę losową z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$. Wylosowaną liczbę należy traktować jako wartość dystrybuanty zmiennej losowej τ , czyli $Q(\tau_1)$. Zgodnie z założeniami przykładu, czas do uszkodzenia jest zmienną losową τ rozkładzie wykładniczym. Zatem wygenerowaną w ten sposób wartość τ_1 obliczamy z wyrażenia $\tau_1 = -(\ln Q(\tau_1))/\lambda$. Podobnie znajdujemy wartość τ_2 . Aby zapewnić zadowalającą zgodność rezultatów rozwiązań uzyskanych tą metodą z wynikami otrzymanymi wcześniej przy użyciu metody analitycznej, liczba losowań powinna być dostatecznie duża, np. rzędu kilkuset lub więcej.



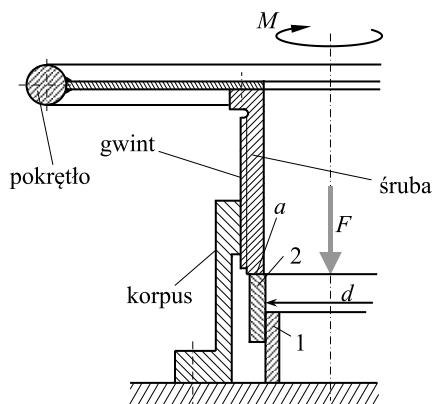
Rys. 2.41. Graficzne rozwiązanie równania (2.152)



Rys. 2.42. Parametry czasu t poprawnego funkcjonowania urządzenia (na tle jej gęstości prawdopodobieństwa)

PRZYKŁAD 2.29

Przyrząd przedstawiony na rysunku 2.43 służy do wtlaczania tulei 1 w tuleję 2. Wtlaczanie to dokonywane jest za pomocą mechanizmu śrubowego i trwa do chwili, aż czoło tulei 2 oprze się o podstawę przyrządu.



Rys. 2.43. Przyrząd do montowania połączeń wtlaczanych

W wyniku montażu ma być utworzone na wspólnej powierzchni o średnicy d ciasne pasowanie obu elementów, określone przez normę. Siła F potrzebna do wtlócenia, wywierana na powierzchni a tulei 2, jest efektem zamiany na tę siłę momentu M przyłożonego do pokrętła. Proces ten zachodzi dzięki współpracy zwojów gwintu śruby ze zwojami gwintu w korpusie przyrządu. Aby możliwe było wtlócenie jednej tulei w drugą, moment M musi pokonać dwa momenty bierne: moment M_s oporów ruchu na powierzchniach współpracujących gwintów i moment tarcia M_t na powierzchni czołowej a . Powierzchnie gwintów i elementów łączonych pokryte są smarem, co ma zmniejszyć obydwa opory ruchu w przyrządzie.

Momenty M_s i M_t są funkcjami wielkości o nieistotnych rozrzutach losowych, określających cechy geometryczne współpracujących powierzchni, oraz współczynników tarcia na tych powierzchniach, zwykle o względnie dużych rozrzutach losowych. Wymiary analizowanego przyrządu są takie, że wyznaczony na tej podstawie całkowity moment oporów ruchu

$$M = M_s + M_t = (1,88 + 54,28\mu_s + 39,50\mu_t)F, \quad (2.153)$$

gdzie: μ_s i μ_t – współczynniki tarcia na powierzchni zwojów gwintu i na powierzchni a , F – siła niezbędna do wykonania wspomnianej operacji technologicznej.

Losowe rozrzuty współczynników μ_s i μ_t opisane są rozkładem normalnym o parametrach odpowiednio: $E\mu_s \equiv m_s = 0,08$, $V\mu_s = 0,01$; $E\mu_t \equiv m_t = 0,10$,

$V\mu_i = 0,01$. Na współczynniki te wpływ ma między innymi jakość smarowania powierzchni przed operacją, a ta zależy od obsługi przyrządu. Z tego powodu zmienne μ_s i μ_t są wzajemnie zależne, a współczynnik korelacji $\rho = 0,5$. Przyjmując, że potrzebna jest siła $F = 7$ kN, oraz znając ograniczenie momentu rozwijanego na pokrętło $M_{gr} = 75$ N·m, należy wyznaczyć prawdopodobieństwo wykonania operacji wtlaczania.

Rozwiązanie

Prawdopodobieństwo p wykonania operacji wtlaczania zależy od oporów ruchu śruby (rys. 2.43), występujących na powierzchni a jej styku z tuleją 2 i na powierzchni zwojów gwintu w strefie kontaktu z gwintem korpusu przyrządu. Jeśli podczas wtlaczania wystąpią zbyt duże opory, moment siły na pokrętło może okazać się niewystarczający do pokonania tych oporów i operacja wtlaczania się nie powiedzie. Warunkiem powodzenia tej operacji jest nieprzekroczenie przez całkowity moment M oporów ruchu ograniczenia w postaci M_{gr} . Warunek ten może być spełniony jedynie z pewnym prawdopodobieństwem p , ponieważ wspomniane opory nie są zdeterminowane i zależą od przypadku. Prawdopodobieństwo to wynosi

$$p = P\{\mathbf{M} \leq M_{gr}\}. \quad (2.154)$$

Z postaci wyrażenia (2.153) wynika, że moment \mathbf{M} oporów ruchu, traktowany jako zmienna losowa, można przedstawić w formie

$$\mathbf{M} = (1,88 + 54,28\mu_s + 39,50\mu_t) \cdot 7 = 13,16 + 379,96\mu_s + 276,50\mu_t. \quad (2.155)$$

Rozkład zmiennej \mathbf{M} , potrzebny do wyznaczenia prawdopodobieństwa p , określmy wprost, mianowicie korzystając z właściwości rozkładu normalnego. Zauważmy w tym celu, że prawa strona relacji (2.155) to suma wielkości zdeterminowanej (13,16) i dwóch zmiennych losowych typu $y = cx$. Wielkość zdeterminowana nie wpływa na postać rozkładu (patrz między innymi przykład 2.21), jedynie na wartość oczekiwaną \mathbf{M} . Zmienne losowe μ_s i μ_t mają rozkłady normalne o znanych parametrach. Załóżmy, że ucięcia w zerze obu tych rozkładów nie mają wpływu na wynik analizy i zostanie on pominięty. Zatem zmienna \mathbf{M} , jako suma wielkości zdeterminowanej oraz zmiennych losowych $379,96\mu_s$ i $276,50\mu_t$, o rozkładzie normalnym, ma rozkład normalny. Parametry zmiennej \mathbf{M} określmy, opierając się na ich właściwościach sformułowanych w postaci wzorów (2.132)–(2.134). Wartość oczekiwana

$$\begin{aligned} E\mathbf{M} &= 13,16 + 379,96 \cdot E\mu_s + 276,50 \cdot E\mu_t = \\ &= 13,16 + 379,96 \cdot 0,08 + 276,50 \cdot 0,10 = 71,21 \text{ N} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

Wariancja zmiennej losowej M

$$\begin{aligned} VM &= V(379,96\mu_s) + V(276,50\mu_t) + 2\rho \cdot \sqrt{V(379,96\mu_s)} \cdot \sqrt{V(276,50\mu_t)} = \\ &= 379,96^2 V\mu_s + 276,50^2 V\mu_t + 2\rho \cdot 379,96 \cdot 276,50 \sqrt{V\mu_s} \cdot \sqrt{V\mu_t} = \\ &= 379,96^2 \cdot 0,01^2 + 276,50^2 \cdot 0,01^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 379,96 \cdot 276,50 \cdot 0,01 \cdot 0,01 = \\ &= 32,58 (\text{N} \cdot \text{m})^2. \end{aligned}$$

Stąd odchylenie standardowe

$$\sigma_M = \sqrt{VM} = \sqrt{32,58} = 5,71 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Zatem rozkład zmiennej M jest znany i jest już możliwe wyznaczenie prawdopodobieństwa p zdefiniowanego przez wzór (2.154). Ze wzoru tego wynika, że poszukiwane prawdopodobieństwo jest równe dystrybuancie $Q(M_{\text{gr}})$ zmiennej losowej M określonej dla jej wartości $M_{\text{gr}} = 75 \text{ N} \cdot \text{m}$. Zgodnie z wyrażeniem (2.22) dystrybuanta ta jest związana z dystrybuantą standaryzowanego rozkładu normalnego, co można przedstawić w postaci

$$Q(M_{\text{gr}}) = \Phi\left(\frac{M_{\text{gr}} - EM}{\sigma_M}\right).$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy

$$Q(75) = \Phi\left(\frac{75 - 71,21}{5,71}\right) = \Phi(0,664).$$

Z tablicy funkcji Φ , zamieszczonej w Załączniku 1, znajdujemy, że $Q(75) = \Phi(0,664) \approx 0,75$. Zatem prawdopodobieństwo tego, że uda się wykonać operację wtlaczania na analizowanym przyrządzie, wynosi $p \approx 0,75$, jest więc niewielkie. Rozsądna byłaby zapewne zmiana przyrządu lub samej technologii połączenia obu tulei.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

FUNKCJE ZMIENNYCH LOSOWYCH CIĄGŁYCH

Zadanie 2.36

Dwie niezależne zmienne losowe x i y mają rozkłady wykładnicze określone przez gęstości prawdopodobieństwa $f(x) = \lambda_x e^{-\lambda_x x}$ oraz $g(y) = \lambda_y e^{-\lambda_y y}$, przy czym $\lambda_x = 5$ i $\lambda_y = 7$. Wyznacz wartość oczekiwaną, odchylenie standardowe oraz wariancję zmiennej losowej $z = x + y$.

Zadanie 2.37

Przedstaw w postaci poglądowej wykres gęstości prawdopodobieństwa standaryzowanej zmiennej losowej x o rozkładzie normalnym (Gaussa). W tym samym układzie współrzędnych narysuj podobny wykres zmiennej losowej $y = 2x$.

Zadanie 2.38

Zmienna losowa x ma rozkład wykładniczy, a jej gęstość prawdopodobieństwa jest opisana przez wyrażenie $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, gdzie $\lambda = 3 \cdot 10^{-3}$ 1/h. Wyznacz wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe zmiennej losowej $y = 2x$. W jednym układzie współrzędnych przedstaw w sposób przybliżony gęstości prawdopodobieństwa obu zmiennych losowych.

Zadanie 2.39

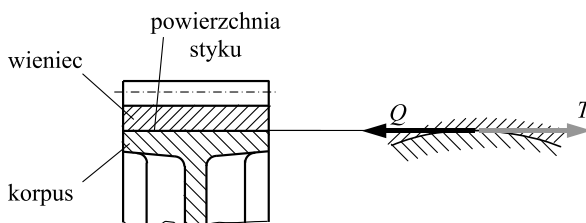
Dwie wielkości traktowane jako zmienne losowe są związane funkcją o postaci $y = 3x + 2$, przy czym zmienna x ma rozkład wykładniczy o gęstości $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, gdzie parametr $\lambda = 1$. Należy wyznaczyć gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej y oraz jej parametry. Przedstaw przybliżone przebiegi wykresów gęstości obu zmiennych losowych.

Zadanie 2.40

Czas τ upływający między kolejnymi zgłoszeniami zapotrzebowania na interwencję jednostki ratowniczej w jednym z miast Polski ma rozkład wykładniczy o parametrze $\lambda = 120 \cdot 10^{-3}$ 1/h. W celu ułatwienia mieszkańcom miasta dostępu do pomocy w nagłych wypadkach została założona druga jednostka ratownicza. Zakładając, że od tej pory są obciążone w podobnym stopniu, należy wyznaczyć gęstość prawdopodobieństwa czasu t upływającego między zgłoszeniami w jednej jednostce po tej zmianie oraz wartość oczekiwaną czasów między zgłoszeniami w obu sytuacjach.

Zadanie 2.41

W połączeniu ciernym wieńca koła zębatego z korpusem koła (rys. 2.44) obciążenie w postaci momentu obrotowego wywołuje na powierzchni styku siłę obwodową Q . Traktuje się ją jako zmienną losową Q o rozkładzie normalnym i parametrach: $EQ = 2,4$ kN, $\sigma_Q = 0,20$ kN. Temu czynnemu obciążeniu przeciwdziałą siła tarcia T rozwijana na wspólnej powierzchni. Siła tarcia ma zapobiegać ewentualnemu pojawieniu się poślizgu między wieńcem i korpusem koła, co oznaczałoby uszkodzenie koła zębatego. Siła T jest zmienną losową o rozkładzie normalnym i parametrach: $ET = 3,27$ kN, $\sigma_T = 0,25$ kN (przykład 2.23).



Rys. 2.44. Siły w połączeniu ciernym dwóch elementów koła zębatego

Należy sprawdzić, czy może dojść do uszkodzenia połączenia, a jeśli tak, to jakie jest jego prawdopodobieństwo.

Zadanie 2.42

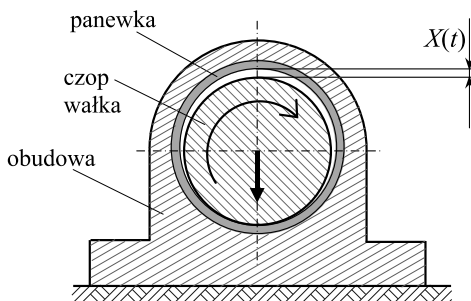
Dwie wielkości traktowane jako zmienne losowe są związane funkcją o postaci $y = x^2$, przy czym zmienna x ma rozkład wykładniczy o gęstości $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Należy wyznaczyć postać gęstości zmiennej losowej y i narysować jej wykres.

Zadanie 2.43

Wyznacz wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe zmiennej losowej $z = x + y$, przy czym x i y to standaryzowane niezależne zmienne losowe o rozkładzie Gaussa. Jaki rozkład ma zmienna z ? Wyznacz maksymalne wartości gęstości prawdopodobieństwa zmiennych losowych x , y i z , a następnie przedstaw w postaci pogładowej wykresy tych gęstości.

Zadanie 2.44

Walek pewnego urządzenia mechanicznego jest podparty dwoma jednakowymi łożyskami ślizgowymi jednakowo obciążonymi (rys. 2.45). Powiększanie się luzu w każdym z nich opisuje funkcja $X(t) = X_0 + vt$, w której: X_0 – luz początkowy, v – prędkość zużywania się współpracujących elementów, t – czas funkcjonowania łożyska.



Rys. 2.45. Łożysko ślizgowe

Zmienne losowe X_0 i v mają rozkłady normalne o parametrach: $EX_0 = 100 \mu\text{m}$, $VX_0 = 100 (\mu\text{m})^2$, $E v = 0,05 \mu\text{m/h}$, $V v = 2 \cdot 10^{-4} (\mu\text{m/h})^2$. Graniczna wartość luzu, po której osiągnięciu łożysko traktuje się jako uszkodzone, $X_{kr} = 220 \mu\text{m}$. Należy wyznaczyć:

- gęstość prawdopodobieństwa luzu $X(t)$, który może powstać w łożysku w wyniku jego funkcjonowania przez wyznaczony okres t .
- prawdopodobieństwo uszkodzenia łożyska w czasie $t = 1200 \text{ h}$, a uzyskany wynik przedstawić w formie pogładowej na tle wykresu gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej $X(1200 \text{ h})$.

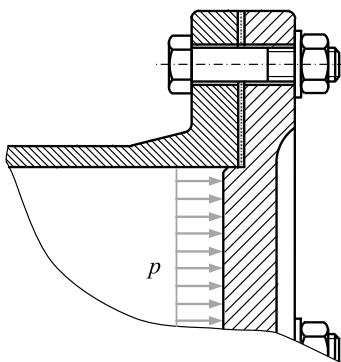
Zadanie 2.45

Walek pewnego urządzenia mechanicznego jest podparty dwoma jednakowymi łożyskami ślizgowymi jednakowo obciążonymi (rys. 2.45). Powiększanie się luzu w każdym z nich opisuje funkcja $X(t) = X_0 + vt$, w której: X_0 – luz początkowy, v – prędkość zużywania się współpracujących elementów, t – czas funkcjonowania łożyska. Zmienne losowe X_0 i v mają rozkłady normalne o parametrach: $EX_0 = 100 \mu\text{m}$, $VX_0 = 100 (\mu\text{m})^2$, $E v = 0,05 \mu\text{m/h}$, $V v = 2 \cdot 10^{-4} (\mu\text{m/h})^2$. Graniczna wartość luzu, po której osiągnięciu łożysko traktuje się jako uszkodzone, $X_{kr} = 220 \mu\text{m}$. Należy sporządzić wykres zależności prawdopodobieństwa uszkodzenia łożyska od czasu jego funkcjonowania.

Zadanie 2.46

Podczas dokręcania śrub łączących kołnierz wylotu rury z pokrywą zamykającą ten wylot (rys. 2.46) wywoływany jest w każdej ze śrub naciąg wstępny i w efekcie średnie naprężenia w najbardziej wyężonym przekroju śruby wynoszące σ_w . Granica wytrzymałości materiału śruby wynosi R_m . Obie te wielkości można traktować jako zmienne losowe o rozkładzie normalnym (wpływ ucięć jest niewielki). W wyniku włączenia rurociągu do eksploatacji pojawia się w nim czynnik o stałym, zdeterminowanym ciśnieniu, co powoduje wzrost naprężeń we wspomnianym przekroju śruby o σ_p . Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo nieuszkodzenia śruby po pojawieniu się w rurociągu ciśnienia.

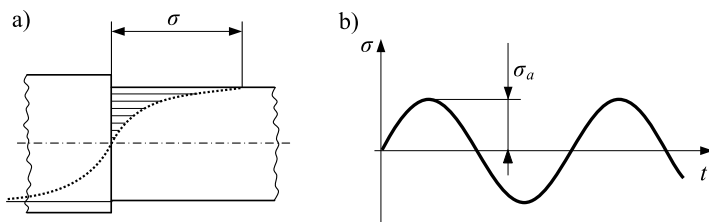
Dane: $ER_m = 750 \text{ MPa}$, $VR_m = 75^2 (\text{MPa})^2$, $E\sigma_w = 400 \text{ MPa}$, $V\sigma_w = 50^2 (\text{MPa})^2$, $\sigma_p = 80 \text{ MPa}$.



Rys. 2.46. Połączenie śrubowe pokrywy z kołnierzem wylotu rury

Zadanie 2.47

Zmienne wahadłowo naprężenia od zginania, działające w miejscu zmiany średnicy wałka pompy paliwowej, mają stałą amplitudę σ_a w czasie użytkowania pompy (rys. 2.47). Jednakże między wałkami z tej samej populacji pomp występują różnice losowe tej amplitudy. Na podstawie analizy modelu eksploatacji pompy wynioskowano, że zmienna losowa σ_a ma rozkład normalny o parametrach: $E\sigma_a = 295 \text{ MPa}$ i $V\sigma_a = 15 (\text{MPa})^2$. Granica zmęczenia Z_o stali stopowej, z której ma być wykonany wałek, jest zmienną losową o rozkładzie w przybliżeniu normalnym. Jego parametry to: $EZ_o = 370 \text{ MPa}$ i $VZ_o = (25 \text{ MPa})^2$. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo zmęczeniowego pęknięcia wałka losowo wskazanego egzemplarza pompy.



Rys. 2.47. Zmienne wahadłowo naprężenia od zginania w przekroju wałka pompy paliwowej

Zadanie 2.48

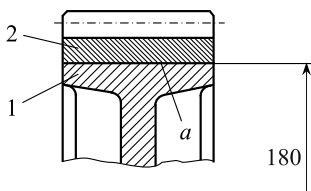
Zmienne wahadłowo naprężenia od zginania, działające w miejscu zmiany średnicy wałka pompy paliwowej, mają stałą amplitudę σ_a w czasie użytkowania pompy (rys. 2.47). Jednakże między

walkami z tej samej populacji pomp występują różnice losowe tej amplitudy. Na podstawie analizy modelu eksploatacji pompy wywnioskowano, że zmienna losowa σ_a ma rozkład normalny o parametrach: $E\sigma_a = 295$ MPa i $V\sigma_a = 15$ (MPa)². Granica zmęczenia Z_o stali stopowej, z której ma być wykonany wałek, jest zmienną losową o rozkładzie w przybliżeniu normalnym. Jego parametry to: $EZ_o = 370$ MPa i $VZ_o = (25 \text{ MPa})^2$. Należy:

- wyznaczyć gęstość prawdopodobieństwa zapasu wytrzymałości zmęczeniowej wałka, tzn. zmiennej $\Delta = Z_o - \sigma_a$,
- po obliczeniu kilku wartości tej gęstości prawdopodobieństwa narysować jej wykres oraz zilustrować na nim prawdopodobieństwo zmęczeniowego pęknięcia wałka.

Zadanie 2.49

Koło zębate należące do reduktora wciągarki linowej postanowiono utworzyć, stosując połączenie cierne dwóch elementów: wieńca koła zębatego i korpusu koła na wspólnej powierzchni walcowej a o nominalnej średnicy 180 mm (rys. 2.48). Aby pod wpływem oddziaływania siły międzyzębnej nie doszło do poślizgu na tej powierzchni, wcisk, definiowany jako różnica między średnicą zewnętrzną d_1 korpusu i średnicą wewnętrzną d_2 wieńca, czyli $w = d_1 - d_2$, powinien być nie mniejszy niż $w_{\min} = 26$ μm . W celu spełnienia tego wymagania na obydwie średnice narzucone zostały tolerancje w postaci odchyłek: $d_1 = 180_{-0,050}^{+0,079}$ i $d_2 = 180_{-0,046}^{+0,046}$. Zapewnienie wymiarów o takich cechach odbywa się na obrabiarce sterowanej numerycznie poprzez odpowiednie ustawienie parametrów jej pracy.

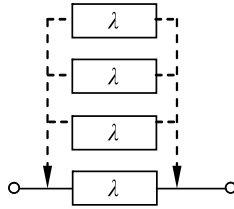


Rys. 2.48. Połączenie cierne wieńca koła zębatego z korpusem koła

W rezultacie kontroli wymiarów dokonywanej na dużych liczebnie próbkach statystycznych stwierdzono, że rozrzut przypadkowy obu wymiarów można opisać rozkładem normalnym o parametrach: w odniesieniu do średnicy d_1 – wartość oczekiwana $m_1 = 180,065$ mm, odchylenie standardowe $\sigma_1 = 0,006$ mm; w odniesieniu do średnicy d_2 – wartość oczekiwana $m_2 = 180,023$ mm, odchylenie standardowe $\sigma_2 = 0,008$ mm. W celu zmniejszenia kosztów wykonania zrezygnowano wstępnie z kontroli obu wymiarów przed ich montażem. Należy sprawdzić, jaki ta decyzja może mieć wpływ na prawdopodobieństwo wytworzenia wadliwego koła zębatego, tzn. niespełniającego wymagania dotyczącego odpowiedniego wcisku.

Zadanie 2.50

W układzie sterowania pewnego urządzenia znajduje się zespół złożony z elementu podstawowego i trzech elementów rezerwowych (rys. 2.49). Elementy rezerwowe włączają się kolejno i automatycznie do funkcjonowania w chwili wystąpienia uszkodzenia elementu poprzedniego. Czasy τ funkcjonowania bez uszkodzenia elementu podstawowego i elementów rezerwowych są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym wykładniczym rozkładzie prawdopodobieństwa określonym przez gęstość prawdopodobieństwa $f(\tau) = \lambda e^{-\lambda \tau}$, przy czym parametr $\lambda = 0,05$ 1/rok. Należy określić postać rozkładu czasu t poprawnego funkcjonowania urządzenia oraz wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe tej zmiennej losowej. Przy określaniu postaci rozkładu skorzystać z centralnego twierdzenia granicznego.



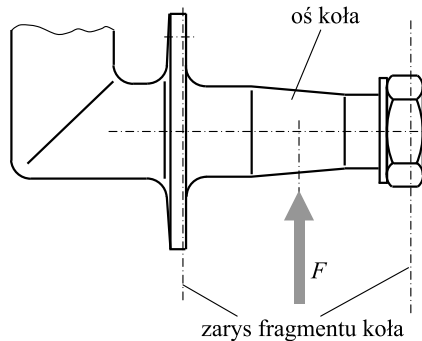
Rys. 2.49. Schemat funkcjonowania urządzenia z elementami rezerwowymi

Zadanie 2.51

W układzie sterowania pewnego urządzenia znajduje się zespół złożony z elementu podstawowego i trzech elementów rezerwowych (rys. 2.49). Elementy rezerwowe włączają się kolejno i automatycznie do funkcjonowania w chwili wystąpienia uszkodzenia elementu poprzedniego. Czasy τ funkcjonowania bez uszkodzenia elementu podstawowego i elementów rezerwowych są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym wykładniczym rozkładzie prawdopodobieństwa określonym przez gęstość prawdopodobieństwa $f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$, przy czym parametr $\lambda = 0,05$ 1/rok. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo poprawnego funkcjonowania urządzenia przez $t = 60$ lat. Przy rozwiązywaniu zadania skorzystać z centralnego twierdzenia granicznego.

Zadanie 2.52

Siła F obciążająca oś podwozia helikoptera podczas lądowania składa się z siły F_1 wynikającej z ciężaru własnego (wraz z ładunkiem) oraz z siły F_2 , będącej rezultatem nadwyżki dynamicznej towarzyszącej lądowaniu (rys. 2.50). Pierwsza z nich ma rozkład normalny o parametrach: $EF_1 = 4$ kN, $\sigma_1 = 0,2$ kN. Siła F_2 ma rozkład wykładniczy, a jej wartość oczekiwana $EF_2 = 0,6$ kN.



Rys. 2.50. Siła obciążająca oś podwozia helikoptera

Należy wyznaczyć wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe całkowitej siły F obciążającej oś podwozia.

Zadanie 2.53

Siła F obciążająca oś podwozia helikoptera podczas lądowania składa się z siły F_1 wynikającej z ciężaru własnego (wraz z ładunkiem) oraz z siły F_2 , będącej rezultatem nadwyżki dynamicznej towarzyszącej lądowaniu (rys. 2.50). Pierwsza z nich $F_1 = 4 + F_o$ [kN], gdzie F_o jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym, przy czym jej wartość oczekiwana $EF_o = 0,2$ kN. Siła F_2 ma również rozkład wykładniczy, a jej wartość oczekiwana $EF_2 = 0,6$ kN. Należy wyznaczyć gęstość prawdopodobieństwa całkowitej siły F obciążającej oś podwozia.

Zadanie 2.54

Jakość i niezawodność funkcjonowania elektrowni wiatrowej zależy od prędkości wiatru. Do opisu rozkładu prędkości wiatru \mathbf{v} w przyjętym okresie najlepiej pasuje rozkład Weibulla, a jego parametry a i λ zależą głównie od położenia geograficznego elektrowni i od wysokości, na której usytuowana jest oś wirnika. Na podstawie pomiarów dokonanych w jednej z gmin województwa dolnośląskiego na wysokości 48 m możliwe było oszacowanie obu parametrów zmiennej losowej \mathbf{v} (tzw. średniej 10-minutowej), charakterystycznych dla tej lokalizacji i czasu 1 roku. Wynoszą one: $a = 2,35$ m/s, $\lambda = 0,025$. Na pochodzące od wiatru obciążenia mechaniczne elementów konstrukcyjnych elektrowni mają wpływ dodatkowo jego podmuchy. Przyjmując, że rozkład prędkości podmuchów \mathbf{v}_p w tej lokalizacji ma rozkład normalny o parametrach: $E\mathbf{v}_p = 6,8$ m/s, $V\mathbf{v}_p = 3,2$ (m/s)². Między zmiennymi losowymi \mathbf{v} i \mathbf{v}_p istnieje silna zależność określona przez współczynnik korelacji $\rho = 0,7$. Należy wyznaczyć wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe prędkości wypadkowego wiatru działającego na elementy konstrukcyjne elektrowni.

wej skokowej. Także wzory definiujące podstawowe wielkości są słuszne i w tym przypadku, pod warunkiem, iż występujące w nich symbole całki zastąpi się symbolem sumowania.

Zatem dystrybuanta $Q(x)$ zmiennej losowej dyskretnej wynosi

$$Q(x) = P\{\mathbf{x} \leq x\} = \sum_{\xi \leq x} p_{\xi}. \quad (3.2)$$

Wzory (2.5) i (2.6) mają w tym przypadku postać

$$\sum_x p_x = 1, \quad (3.3)$$

$$P\{\mathbf{x} > x\} = 1 - P\{\mathbf{x} \leq x\} = 1 - Q(x). \quad (3.4)$$

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej skokowej wynoszą

$$E\mathbf{x} = \sum_x x p_x, \quad (3.5)$$

$$V\mathbf{x} = \sum_x (x - E\mathbf{x})^2 p_x, \quad (3.6)$$

a odchylenie standardowe

$$\sigma = \sqrt{V\mathbf{x}}. \quad (3.7)$$

Właściwości parametrów funkcji zmiennych losowych, określone przez wzory (2.132)–(2.135), są słuszne także w odniesieniu do zmiennych dyskretnych.

W następnych podrozdziałach są zaprezentowane w przykładach i zadaniach dwa rodzaje rozkładów zmiennych losowych skokowych, najczęściej stosowane w praktyce inżynierskiej. Są to rozkłady: dwumianowy i Poissona.

3.2. ROZKŁAD DWUMIANOWY

Rozkładem dwumianowym jest nazywany rozkład prawdopodobieństwa p_x zajścia określonego zdarzenia A dokładnie x razy w n doświadczeniach, o postaci

$$p_x = P\{\mathbf{x} = x\} = \frac{n!}{x!(n-x)!} q^x (1-q)^{n-x}, \quad (3.8)$$

przy czym: \mathbf{x} – zmienna losowa dyskretna, oznaczająca liczbę zajść tego zdarzenia w n doświadczeniach ($x = 0, 1, 2, \dots, n$), q – prawdopodobieństwo zajścia tego zdarzenia w jednym doświadczeniu (jednakowe w każdym z doświadczeń). Rozkład dwumianowy jest także nazywany rozkładem Bernoulliego.

PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 3.1

Pewien lekkoatleta przekracza w rzucie młotem 80 metrów ze średnią częstością 60%. W czasie zawodów *Diamentowej Ligi* wykonuje 6 rzutów. Należy znaleźć rozkład prawdopodobieństwa liczby x wykonanych rzutów na odległość większą niż 80 m.

Rozwiązanie

Poszukujemy rozkładu prawdopodobieństwa

$$p_x = P\{\mathbf{x} = x\},$$

gdzie: x – zmienna losowa dyskretna, oznaczająca liczbę tych spośród $n = 6$ wykonanych rzutów, w których osiągnięta odległość jest większa niż 80 m, przy czym $x = 0, 1, \dots, 6$.

Do wyznaczenia wartości prawdopodobieństwa p_x dla każdego x zastosujemy wzór (3.8), który w tym przypadku ma postać

$$p_x = \frac{6!}{x!(6-x)!} q^x (1-q)^{6-x}, \quad (3.9)$$

gdzie q to prawdopodobieństwo przekroczenia 80 m w jednym rzucie. Zakładamy, że w każdym z rzutów jest ono takie samo, a z treści przykładu wynika, że wynosi ono w przybliżeniu $q = 0,60$. Zatem

$$p_x = \frac{6!}{x!(6-x)!} \cdot 0,60^x \cdot 0,40^{6-x}. \quad (3.10)$$

Po podstawieniu do tego wyrażenia wartości $x = 0$ wyznaczamy prawdopodobieństwo nieprzekroczenia w żadnym z sześciu rzutów granicy 80 m. Wynosi ono

$$p_0 = \frac{6!}{0!(6-0)!} \cdot 0,60^0 \cdot 0,40^{6-0} = 0,004.$$

W rezultacie zastosowania wyrażenia (3.10) do obliczenia prawdopodobieństwa p_x dla kolejnych wartości $x = 1, \dots, 6$ otrzymujemy:

$$p_1 = 0,037, \quad p_2 = 0,138, \quad p_3 = 0,276, \quad p_4 = 0,311, \quad p_5 = 0,187, \quad p_6 = 0,047.$$

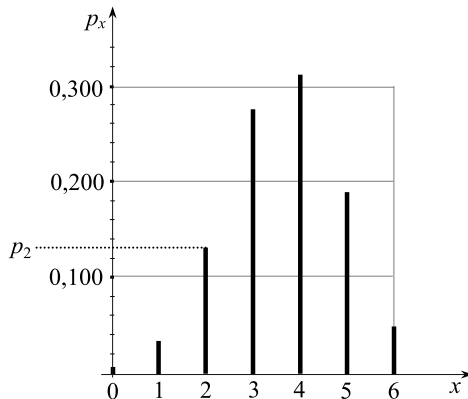
Uzyskane wyniki obliczeń są zilustrowane na rysunku 3.2.

Uwaga: Wartości prawdopodobieństw p_x w tym przykładzie można wyznaczyć także przy użyciu programu MS Excel. W tym celu wykorzystujemy komendę ROZKŁAD.DWUM, która jest dostępna w zakładce Formuły → Więcej funkcji → Statystyczne. W celu wykonania obliczenia należy określić:

- liczbę „sukcesów” w próbach, tzn. wartość x liczby przekroczeń 80 m, dla której jest wyznaczane prawdopodobieństwo,

- „próby”, tzn. liczbę rzutów ($n = 6$),
- prawdopodobieństwo sukcesu, tzn. średnie prawdopodobieństwo q przekroczenia w jednym rzucie 80 m ($q = 0,60$),
- parametr logiczny, który określa, czy wynikiem ma być wartość prawdopodobieństwa p_x , czy dystrybuanta.

Parametr logiczny definiujemy jako „Fałsz” (w przykładzie obliczana jest bowiem wartość prawdopodobieństwa p_x).



Rys. 3.2. Rozkład dwumianowy zmiennej losowej x (liczby przekroczeń 80 m w sześciu rzutach młotem)

PRZYKŁAD 3.2

Opierając się na wynikach uzyskanych w rozwiązaniu poprzedniego zadania, należy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że w co najmniej trzech z sześciu rzutów młot wyląduje poza granicą 80 metrów.

Rozwiązanie

Poszukujemy prawdopodobieństwa

$$F(3) = P\{x \geq 3\}, \quad (3.11)$$

gdzie, podobnie jak w poprzednim przykładzie: x – zmienna losowa dyskretna, oznaczająca liczbę tych spośród $n = 6$ wykonanych rzutów, w których osiągnięta odległość jest większa niż 80 m. Zauważmy, że prawdopodobieństwo $F(3)$ wynosi

$$F(3) = 1 - P\{x < 3\} = 1 - Q(2), \quad (3.12)$$

gdzie $Q(2) = P\{x \leq 2\}$ jest dystrybuantą zmiennej x określoną dla wartości $x = 2$.

Zatem, wielkość $F(3)$ może być wyznaczona albo bezpośrednio na podstawie zapisu (3.11) i wówczas

$$F(3) = p_3 + p_4 + p_5 + p_6, \quad (3.13)$$

albo pośrednio – na podstawie związku (3.12) i wówczas

$$F(3) = 1 - (p_0 + p_1 + p_2). \quad (3.14)$$

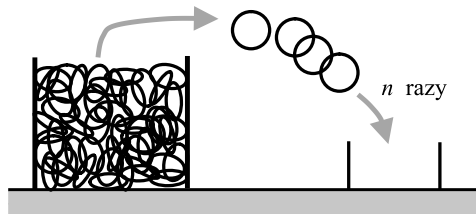
Skorzystamy z wyrażenia (3.14). Po podstawieniu do niego wartości p_x obliczonych w przykładzie 3.1 otrzymujemy

$$F(3) = 1 - (0,004 + 0,037 + 0,138) = 0,821.$$

PRZYKŁAD 3.3

W pojemniku znajduje się duża liczba jednakowych uszczeltek zapasowych. Wiadomo, że ich wadliwość wynosi $w = 2\%$. Losowo pobrano z niego $n = 7$ uszczeltek (rys. 3.3). Należy:

- 1) wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że wśród pobranych uszczeltek nie znajdzie się uszczelka wadliwa,
- 2) wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że wśród tych siedmiu uszczeltek znajdzie się co najmniej jedna uszczelka wadliwa,
- 3) sporządzić wykres rozkładu prawdopodobieństwa liczby pobranych uszczeltek wadliwych.



Rys. 3.3. Pobieranie uszczeltek z pojemnika

Rozwiązanie

Ad 1) W tej części przykładu celem jest wyznaczenie prawdopodobieństwa

$$p_x = P\{\mathbf{x} = x\},$$

gdzie x – zmienna losowa dyskretna, oznaczająca liczbę wadliwych uszczeltek wśród $n = 7$ pobranych losowo z pojemnika, przy czym $x = 0$. Zakładamy, że losowania są niezależne, tzn. wyjęcie uszczelki z pojemnika nie wpływa na poziom wadliwości pozostałych uszczeltek (gdyż w pojemniku znajduje się duża liczba uszczeltek).

Do wyznaczenia poszukiwanego prawdopodobieństwa p_0 tego, że wśród pobranych 7 uszczeltek nie znajdzie się uszczelka wadliwa, zastosujemy wzór (3.8) na rozkład dwumianowy. Przyjmijmy również, że występujące w tym wzorze

prawdopodobieństwo trafienia na wadliwą uszczelkę w wyniku jednorazowego pobrania z pojemnika jest równe podanej wadliwości, tzn. $q = 0,02$. W analizowanym przypadku mamy zatem

$$p_0 = P\{x = 0\} = \frac{7!}{0!(7-0)!} 0,02^0 \cdot 0,98^{7-0} = 0,98^7 = 0,868.$$

Ad 2) Należy także wyznaczyć prawdopodobieństwo

$$F(1) = P\{x \geq 1\}$$

tę, że wśród pobranych 7 uszczelk jest jedna lub więcej uszczelk wadliwych. Zauważmy, że do wyznaczenia prawdopodobieństwa $F(1)$ można wykorzystać wyrażenie

$$F(1) = 1 - P\{x < 1\} = 1 - Q(0),$$

gdzie dystrybuanta zmiennej x

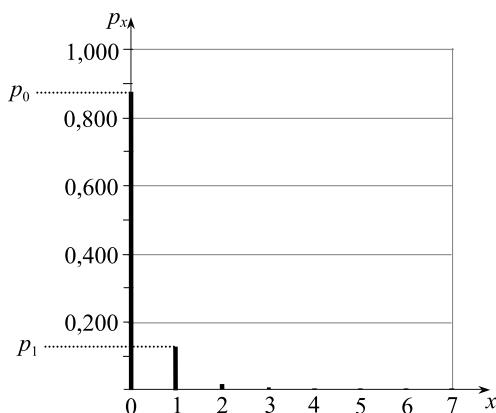
$$Q(0) = p_0 = 0,868.$$

Zatem

$$F(1) = 1 - 0,868 = 0,132.$$

Ad 3) W celu narysowania wykresu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej x , czyli liczby wadliwych uszczelk wśród siedmiu pobranych z pojemnika, obliczamy wartości prawdopodobieństwa p_x , korzystając ze wzoru (3.8) na rozkład dwumianowy i podstawiając do niego kolejne wartości x . Wyznaczone wartości wynoszą: $p_0 = 0,868$ (obliczona w punkcie 1), $p_1 = 0,124$, $p_2 = 0,007$, $p_3 \approx 0,000$, $p_4 \approx p_5 \approx p_6 \approx p_7 \approx 0$.

Sporządzony na tej podstawie wykres jest przedstawiony na rysunku 3.4.



Rys. 3.4. Rozkład dwumianowy zmiennej losowej x (liczby pobranych wadliwych uszczelk)

PRZYKŁAD 3.4

W zależności od dostawcy wadliwość uszczelek zapasowych może wynosić $w = (0,5-3)\%$. Przy założeniu, że w pojemniku znajduje się duża liczba uszczelek o określonej wadliwości (dostarczonych przez jednego z ich producentów), należy:

- 1) zbadać wpływ stopnia wadliwości w (czyli wpływ wyboru producenta uszczelek) na prawdopodobieństwo tego, że wśród $n = 7$ uszczelek znajdzie się co najwyżej jedna uszczelka wadliwa,
- 2) sporządzić wykres zależności tego prawdopodobieństwa od wadliwości w .

Rozwiązanie

Ad 1) Badamy wpływ wadliwości w uszczelek w pojemniku na prawdopodobieństwo

$$Q(1) = P\{x \leq 1\}, \quad (3.15)$$

gdzie: x – zmienna losowa dyskretna, oznaczająca liczbę wadliwych uszczelek wśród $n = 7$ pobranych losowo z pojemnika. Zakładamy, że liczba uszczelek w pojemniku jest na tyle duża, iż wyjęcie uszczelki z pojemnika nie wpływa na poziom wadliwości pozostałych uszczelek. Założenie to oznacza, że losowania są niezależne. Zauważmy, iż wielkość Q jest dystrybuantą zmiennej losowej dyskretnej x .

Podobnie jak w przykładzie 3.3 przyjmujemy, że zmienna x ma rozkład dwumianowy. Zatem

$$Q(1) = p_0 + p_1, \quad (3.16)$$

przy czym, zgodnie ze wzorem (3.8),

$$p_0 = \frac{7!}{0!(7-0)!} w^0 (1-w)^{7-0} = (1-w)^7, \quad (3.17)$$

$$p_1 = \frac{7!}{1!(7-1)!} w^1 (1-w)^{7-1} = 7w(1-w)^6. \quad (3.18)$$

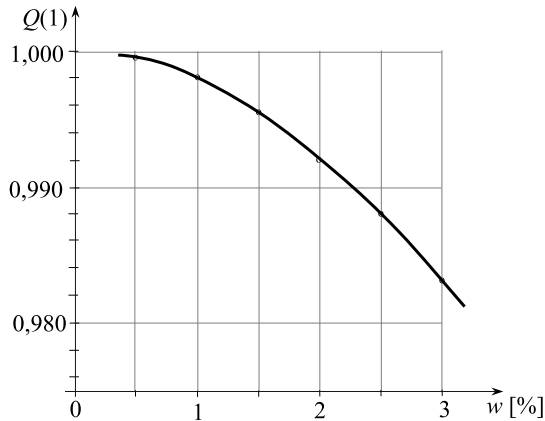
Po podstawieniu wyrażeń (3.17) i (3.18) do wzoru (3.16) otrzymujemy

$$Q(1) = (1-w)^6 (1+6w).$$

Wzór ten wykorzystamy do obliczeń prawdopodobieństwa $Q(1)$ dla kolejnych wadliwości w w przedziale wartości $(0,5-3)\% = 0,005-0,030$. Wyniki tych obliczeń umieszczone są w tabeli 3.1 i przedstawione na rysunku 3.5.

Tabela 3.1. Wyniki obliczeń prawdopodobieństwa $Q(1)$

w	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030
$Q(1)$	0,9995	0,9980	0,9955	0,9921	0,9880	0,9829



Rys. 3.5. Wpływ wadliwości na prawdopodobieństwo tego, że wśród $n = 7$ uszczelek znajdzie się co najwyżej jedna uszczelka wadliwa

PRZYKŁAD 3.5

W pewnej firmie jest grupa $n = 10$ stanowisk pracy o jednakowym (w przybliżeniu) poziomie ryzyka zawodowego. Prawdopodobieństwo zajścia wypadku na pojedynczym stanowisku w tej grupie w ciągu 1 roku wynosi $q = 0,01$. Przyjmując, że liczba wypadków w ciągu 1 roku w tej grupie stanowisk pracy jest zmienną losową x o rozkładzie dwumianowym, należy wyznaczyć prawdopodobieństwo zajścia wśród nich co najmniej jednego wypadku w ciągu 1 roku.

Rozwiązanie

W tym przykładzie celem jest wyznaczenie prawdopodobieństwa

$$F(1) = P\{x \geq 1\},$$

Potraktujmy funkcjonowanie pojedynczego stanowiska pracy w ciągu 1 roku jako jedno doświadczenie, które może się skończyć niepowodzeniem z prawdopodobieństwem $q = 0,01$.

Założmy, że zajścia wypadków na poszczególnych stanowiskach pracy są niezależne, tzn. zajście wypadku na jednym stanowisku pracy nie wpływa na prawdopodobieństwo zajścia takiego zdarzenia na pozostałych stanowiskach. Po-

mińmy także możliwość zajścia więcej niż jednego wypadku w ciągu 1 roku na pojedynczym stanowisku pracy. Przy tych założeniach poszukiwane prawdopodobieństwo $F(1)$ zajścia co najmniej jednego wypadku w ciągu 1 roku w rozważanej grupie $n = 10$ stanowisk pracy możemy wyznaczyć, opierając się na rozkładzie dwumianowym zmiennej losowej x . Zauważmy, że prawdopodobieństwo $F(1)$ wynosi

$$F(1) = 1 - P\{x = 0\},$$

gdzie $P\{x = 0\} \equiv p_0$ jest dystrybuantą zmiennej x określoną dla jej wartości $x = 0$. Zgodnie ze wzorem (3.8) określającym rozkład dwumianowy

$$p_0 = \frac{10!}{0!(10-0)!} \cdot 0,01^0 \cdot 0,99^{10-0} = 0,99^{10} = 0,904.$$

Stąd prawdopodobieństwo zajścia w rozważanej grupie 10 stanowisk pracy co najmniej 1 wypadku w ciągu 1 roku

$$F(1) = 1 - 0,904 = 0,096.$$

PRZYKŁAD 3.6

Według oszacowań ekspertów prawdopodobieństwo przzerwania wałów przeciwpowodziowych w pewnej gminie w ciągu 1 roku wynosi 0,005. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 20 lat:

- nie dojdzie w gminie do przzerwania wałów,
- dojdzie do przzerwania wałów jeden raz.

Rozwiązanie

Zakładamy, że stan wałów przeciwpowodziowych nie zmienia się w analizowanym okresie, co oznacza, iż prawdopodobieństwo ich przzerwania w każdym z 20 lat jest takie samo i wynosi $q = 0,005$. Każdy rok potraktujemy jako jedno doświadczenie, które może się skończyć przzerwaniem wałów lub ich nieprzerwaniem. Przyjmijmy również, że tak określone doświadczenia są wzajemnie niezależne. Pomińmy też możliwość zajścia więcej niż jednego przzerwania wałów w ciągu 1 roku.

Wielkością, którą należy wyznaczyć w pierwszej części przykładu jest prawdopodobieństwo nieprzerwania wałów w ciągu 20 lat, czyli wielkość

$$p_0 = P\{x = 0\},$$

gdzie x to zmienna losowa, oznaczająca możliwą liczbę zająć zdarzenia, polegającego na przzerwaniu wałów, w ciągu 20 lat.

Przy wymienionych założeniach możemy przyjąć, że zmienna x ma rozkład dwumianowy określony przez wyrażenie

$$p_x = P\{x = x\} = \frac{n!}{x!(n-x)!} q^x (1-q)^{n-x}. \quad (3.19)$$

Przy wyznaczaniu wielkości p_0 należy w tym wyrażeniu podstawić dane: $x = 0$, $n = 20$ i $q = 0,005$. W rezultacie otrzymujemy

$$p_0 = \frac{20!}{0!(20-0)!} \cdot 0,005^0 \cdot 0,995^{20-0} = 0,995^{20} = 0,904,$$

co w praktyce, ze względu na małą wartość tego prawdopodobieństwa, mogłoby oznaczać konieczność poprawy konstrukcji wałów.

W drugiej części przykładu należy wyznaczyć prawdopodobieństwo p_1 przewrnięcia wałów w ciągu 20 lat dokładnie jeden raz. Przy wyznaczaniu tego prawdopodobieństwa należy do wzoru (3.19) podstawić dane: $x = 1$, $n = 20$ i $q = 0,005$. Wówczas

$$p_1 = \frac{20!}{1!(20-1)!} \cdot 0,005^1 \cdot 0,995^{20-1} = 20 \cdot 0,005 \cdot 0,995^{19} = 0,091.$$

3.3. ROZKŁAD POISSONA

Jeśli liczba n doświadczeń jest duża, to wyznaczanie prawdopodobieństwa zajścia w ich wyniku określonego zdarzenia na podstawie rozkładu dwumianowego może być uciążliwe. W takich przypadkach wygodne jest dokonywanie przybliżonych oszacowań prawdopodobieństwa zajścia wspomnianego zdarzenia dokładnie x razy w n doświadczeniach, czyli prawdopodobieństwa

$$p_x = P\{x = x\},$$

przy użyciu wzoru Poissona. Wielkość x to zmienna losowa, oznaczająca możliwą liczbę zajść zdarzenia. Wzór Poissona ma postać

$$p_x = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad (3.20)$$

gdzie λ jest wartością oczekiwaną liczby zajść zdarzenia w n doświadczeniach, tzn.

$$\lambda = Ex = nq = \text{const}, \quad (3.21)$$

przy czym q jest prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia w jednym doświadczeniu.

Rozkład zmiennej losowej x , określony przez wzór (3.20), nosi nazwę rozkładu Poissona. Przybliżenie rozkładu dwumianowego rozkładem Poissona jest tym lepsze, im większa jest liczba wspomnianych doświadczeń n . Przyjmuje się w praktyce, że aproksymacja taka jest wystarczająco dokładna, jeśli $n > 20$, a $\lambda \leq 2 \div 3$ (jak wynika ze wzoru (3.21), oznacza to, że $q \leq 0,15$).

Suma

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$$

niezależnych zmiennych losowych x i y o rozkładzie Poissona ma też rozkład Poissona, przy czym [5]

$$\lambda = E\mathbf{z} = \lambda_x + \lambda_y. \quad (3.22)$$

PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 3.7

W pewnej firmie jest grupa $n = 10$ stanowisk pracy o jednakowym (w przybliżeniu) poziomie ryzyka zawodowego. Prawdopodobieństwo zajścia wypadku na pojedynczym stanowisku w ciągu 1 roku wynosi $q = 0,07$. Przyjmując, że liczba wypadków w ciągu 1 roku w tej grupie stanowisk pracy jest zmienną losową x o rozkładzie Poissona, sporządź wykres rozkładu prawdopodobieństwa tej zmiennej w przedziale wartości $0 \leq x \leq 5$.

Rozwiązanie

Analogicznie do przykładu 3.5, potraktujmy funkcjonowanie pojedynczego stanowiska pracy w ciągu 1 roku jako jedno doświadczenie, które może się skończyć niepowodzeniem z prawdopodobieństwem $q = 0,07$. W celu narysowania rozkładu prawdopodobieństwa p_x liczby x wypadków w ciągu 1 roku w grupie rozważanych stanowisk pracy wyznaczmy wartości tego prawdopodobieństwa zgodnie ze wzorem Poissona

$$p_x = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad (3.23)$$

gdzie $\lambda = E\mathbf{x} = nq = 10 \cdot 0,07 = 0,7$.

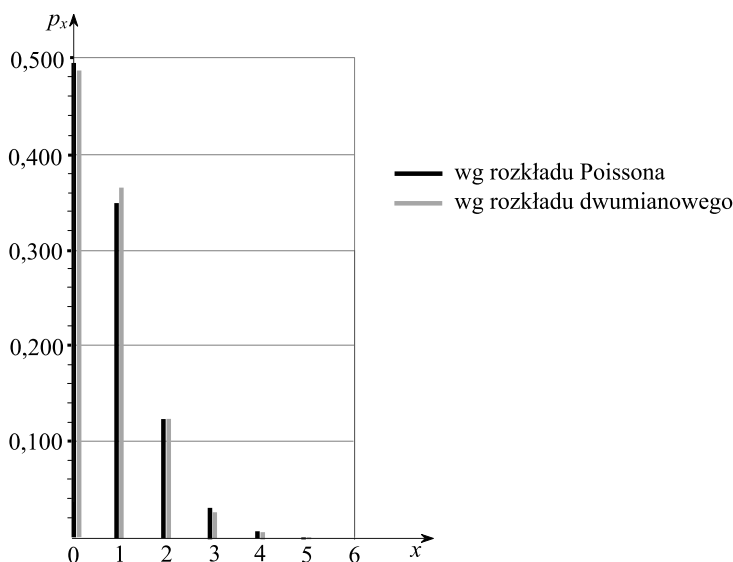
Prawdopodobieństwa tego, że w ciągu 1 roku w grupie $n = 10$ stanowisk pracy nie dojdzie do wypadku i że dojdzie dokładnie do jednego wypadku wynoszą więc

$$p_0 = e^{-0,7} \cdot \frac{0,7^0}{0!} = 0,497, \quad p_1 = e^{-0,7} \cdot \frac{0,7^1}{1!} = 0,348.$$

Po podstawieniu do wzoru (3.23) kolejnych wartości x , tzn. $x = 2, 3, 4$ i 5 , obliczamy odpowiednie prawdopodobieństwa. Wszystkie zostały podane w tabeli 3.2. W celu porównania w tabeli zamieszczone są też wyniki uzyskane przy założeniu, że rozkład liczby wypadków jest dwumianowy, czyli otrzymane przy użyciu wzoru (3.8). Rezultaty obliczeń są przedstawione na rysunku 3.6.

Tabela 3.2. Wyniki obliczeń prawdopodobieństwa liczby wypadków

x		0	1	2	3	4	5
p_x	rozkład Poissona	0,497	0,348	0,122	0,028	0,005	0,000
	rozkład dwumianowy	0,484	0,364	0,123	0,024	0,003	0,000



Rys. 3.6. Rozkład liczby wypadków w firmie

Różnice między obydwooma rozkładami są zatem niewielkie, a aproksymację rozkładu dwumianowego rozkładem Poissona można w tym przypadku uznać za dobrą (mimo względu na małą liczbę n).

Uwaga: Wartości prawdopodobieństw p_x w tym przykładzie można wyznaczyć także przy użyciu programu MS Excel, podobnie, jak w przykładzie 3.1. Jednak tym razem wykorzystujemy w tym celu komendę ROZKŁAD.POISSON, dostępną w zakładce Formuły → Więcej funkcji → Statystyczne. W celu wykonania obliczenia należy określić:

- wartość liczby zdarzeń x , tzn. liczby wypadków w ciągu 1 roku w grupie rozważanych stanowisk pracy, dla której jest wyznaczane prawdopodobieństwo,
- wartość „średnią”, tzn. wartość oczekiwaną λ liczby wypadków (w naszym przypadku $\lambda = nq = 10 \cdot 0,07 = 0,70$),

- parametr logiczny, który określa, czy wynikiem ma być wartość prawdopodobieństwa p_x , czy dystrybuanta.

Parametr logiczny definiujemy jako „Falsz” (w przykładzie obliczana jest bowiem wartość prawdopodobieństwa p_x).

PRZYKŁAD 3.8

Wiadomo, że wadliwość jednakowych uszczerek zapasowych trzymany w pojemniku wynosi $w = 2\%$. Losowo pobrano z niego $n = 50$ uszczerek. Należy wyznaczyć:

- 1) prawdopodobieństwo tego, że wśród pobranych uszczerek znajdą się co najwyżej dwie uszczelki wadliwe,
- 2) wartość oczekiwaną liczby wadliwych uszczerek wśród $n = 50$ pobranych.

Rozwiązanie

Ad 1) Poszukiwane prawdopodobieństwo można przedstawić za pomocą symboli matematycznych w postaci

$$Q_2 = P\{x \leq 2\},$$

gdzie x jest zmienną losową, określającą liczbę wadliwych uszczerek wśród $n = 50$ pobranych z pojemnika. Zmienna ta może przybierać wartości $x = 0, 1, \dots, 50$. Zakładamy, że pobieranie uszczerek z pojemnika nie zmienia wadliwości w .

Prawdopodobieństwo Q_2 wynosi

$$Q_2 = p_0 + p_1 + p_2,$$

przy czym p_x jest prawdopodobieństwem tego, że zmienna losowa x przyjmie dokładnie wartość równą x (czyli liczba wadliwych uszczerek wśród pobranych 50 wynosi x). Wyznaczanie wielkości p_x przy założeniu, iż zmienna x ma rozkład dwumianowy byłoby uciążliwe ze względu na względnie dużą wartość n . Dlatego dokonajmy aproksymacji tego rozkładu rozkładem Poissona. Zatem w odniesieniu do wartości $x = 0, 1$ i 2 zastosujemy wzór

$$p_x = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad (3.24)$$

gdzie, zgodnie z wyrażeniem (3.21), $\lambda = Ex = nq = nw = 50 \cdot 0,02 = 1$. Otrzymujemy:

$$p_0 = e^{-1} \cdot \frac{1^0}{0!} = 0,368, \quad p_1 = e^{-1} \cdot \frac{1^1}{1!} = 0,368, \quad p_2 = e^{-1} \cdot \frac{1^2}{2!} = 0,184.$$

Stąd

$$Q_2 = 0,368 + 0,368 + 0,184 = 0,920.$$

Ad 2) Wartość oczekiwana zmiennej losowej x została już wyznaczona w punkcie 1. Wynosi ona $Ex = \lambda = 1$. Obliczmy ją ponownie, korzystając ze wzoru (3.5) definiującego tę wielkość. Zgodnie z nim

$$Ex = \sum_x x p_x.$$

Po podstawieniu do tego wyrażenia wzoru (3.24) otrzymujemy

$$\begin{aligned} Ex &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{50} x \cdot \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \left(0 + \lambda + 2 \cdot \frac{1}{2!} \lambda^2 + 3 \cdot \frac{1}{3!} \lambda^3 + 4 \cdot \frac{1}{4!} \lambda^4 + \dots \right) = \\ &= e^{-\lambda} \lambda \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^4}{4!} + \dots \right) = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda = 1. \end{aligned}$$

PRZYKŁAD 3.9

Według danych armii pruskiej z początku XX wieku do wypadków śmiertelnych na skutek kopnięcia przez konia w oddziałach kawalerii dochodziło z częstotnością 6 razy w ciągu 10 lat [3]. Należy wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa liczby x wypadków śmiertelnych wskutek kopnięcia przez konia w armii pruskiej w ciągu 1 roku.

Rozwiązanie

Nie znamy liczby n sytuacji, w których mogło dochodzić do kopnięcia kawalerzysty przez konia, ale przypuścić można, że była duża. Z treści przykładu wynika, iż średnia liczba wypadków śmiertelnych wskutek kopnięcia przez konia w ciągu 1 roku może być oszacowana jako

$$Ex = \frac{6}{10} = 0,6.$$

Założmy również, że zdarzenia kopnięcia przez konia są niezależne. Na podstawie tych informacji przyjmijmy, iż rozkład zmiennej losowej x , czyli liczby wypadków śmiertelnych wskutek kopnięcia przez konia w armii pruskiej w ciągu 1 roku, jest rozkładem Poissona. Zatem prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 1 roku traciło w ten sposób życie x kawalerzystów, wynosi

$$p_x = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad (3.25)$$

gdzie $x = 0, 1, 2, \dots$, a parametr λ , zgodnie z wyrażeniem (3.21), jest równy wartości oczekiwanej zmiennej x , czyli $\lambda = Ex = 0,6$.

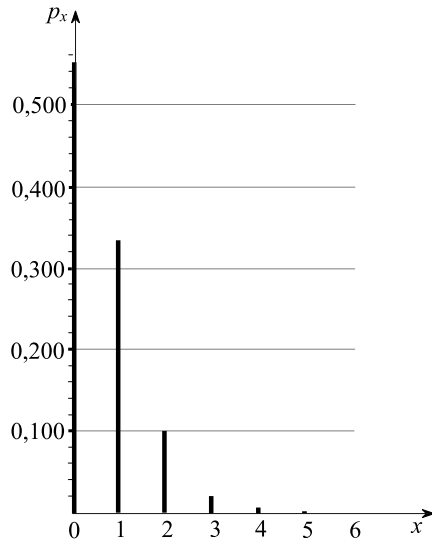
Prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 1 roku żaden z kawalerzystów nie został śmiertelnie kopnięty przez konia, wynosi

$$p_0 = P\{x = 0\} = e^{-0,6} \cdot \frac{0,6^0}{0!} = 0,549.$$

Przy użyciu wzoru (3.24) obliczamy kolejne prawdopodobieństwa p_x . Wynoszą one:

$$p_1 = 0,329, p_2 = 0,099, p_3 = 0,020, p_4 = 0,003, p_5 = 0,0003, \dots$$

Uzyskane rezultaty są przedstawione na rysunku 3.7.



Rys. 3.7. Rozkład prawdopodobieństwa liczby wypadków śmiertelnych w armii pruskiej w ciągu 1 roku na skutek kopnięcia przez konia

PRZYKŁAD 3.10

W pewnym dużym przedsiębiorstwie (z dużą liczbą stanowisk pracy) dochodzi do wypadków przy pracy średnio raz na 5 lat. Stosując rozkład Poissona, należy wyznaczyć prawdopodobieństwo zajścia w ciągu najbliższego roku w tym przedsiębiorstwie co najmniej dwóch wypadków.

Rozwiązanie

Liczba wypadków x w analizowanym przedsiębiorstwie w ciągu 1 roku może przybierać w sposób losowy wartości $x = 0, 1, 2, \dots, n$, przy czym liczba n jest duża i nieokreślona. Poszukujemy prawdopodobieństwa

$$F(2) = P\{x \geq 2\}.$$

Zauważmy, że

$$P\{\mathbf{x} \geq 2\} = 1 - P\{\mathbf{x} < 2\} = 1 - Q(1),$$

gdzie $Q(1)$ jest dystrybuantą zmiennej losowej \mathbf{x} , określoną dla wartości $x = 1$. Dystrybuanta ta wynosi

$$Q(1) = p_0 + p_1.$$

Zatem

$$F(2) = 1 - (p_0 + p_1), \quad (3.26)$$

przy czym prawdopodobieństwo p_0 niezajścia w przedsiębiorstwie w ciągu 1 roku wypadku przy pracy i prawdopodobieństwo p_1 zajścia w tym czasie dokładnie jednego wypadku, zgodnie z rozkładem Poissona, wynoszą:

$$p_0 = P\{\mathbf{x} = 0\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda},$$

$$p_1 = P\{\mathbf{x} = 1\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^1}{1!} = \lambda e^{-\lambda}.$$

Do liczbowego wyznaczenia prawdopodobieństw p_0 i p_1 konieczne jest wcześniejsze określenie wartości parametru λ . Skorzystamy w tym celu z relacji (3.21), według której $\lambda = E\mathbf{x}$. Przyjmujemy, że wartość oczekiwana zmiennej \mathbf{x} jest w przybliżeniu równa wartości średniej \bar{x} liczby wypadków w ciągu 1 roku (patrz rozdz. 5). Z treści przykładu wynika, iż

$$\bar{x} \approx \frac{1}{5} = 0,2.$$

Zatem $\lambda = 0,2$. Stąd

$$p_0 = e^{-0,2} = 0,819,$$

$$p_1 = 0,2e^{-0,2} = 0,164.$$

Po podstawieniu tych wartości do wyrażenia (3.26) otrzymujemy

$$F(2) = 1 - (0,819 + 0,164) = 0,017.$$

Poszukiwane prawdopodobieństwo zajścia w ciągu roku dwóch lub więcej wypadków w analizowanym przedsiębiorstwie wynosi zatem 1,7%.

PRZYKŁAD 3.11

Firma produkcyjna zamówiła w hucie A dostawę 80 kątowników o określonym kształcie i wymiarach, wykonanych z duralu 2024 (PA7) o granicy wytrzymałości $R_m = 450$ MPa. Zgodnie z umową huta gwarantuje zapewnienie tej wytrzymało-

ści z prawdopodobieństwem 0,980. Podobną umowę na dostarczenie 180 takich samych kątowników zawarto z hutą B. Ta huta gwarantuje zapewnienie granicy wytrzymałości $R_m = 450$ MPa z prawdopodobieństwem 0,995. Należy:

- 1) wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa liczby z kątowników dostarczonych do firmy produkcyjnej z obu hut, niespełniających wymagania dotyczącego ich wytrzymałości,
- 2) zilustrować rezultat i skomentować.

Rozwiązanie

Ad 1) Wśród dostarczonych przez obie huty $80 + 180 = 260$ kątowników znajduje się z kątowników wadliwych, tzn. o granicy wytrzymałości $R_m < 450$ MPa. Traktujemy wielkość z jako zmienną losową. Składa się ona z liczby x wadliwych kątowników dostarczonych przez hutę A i liczby y także wadliwych kątowników otrzymanych z huty B. Zatem

$$z = x + y$$

Mamy więc do czynienia ze zmienną losową dyskretną, która jest sumą dwóch innych zmiennych losowych dyskretnych. Zakładamy, że są one niezależne. Przyjmijmy również drugie założenie upraszczające: właściwości wytrzymałościowe poszczególnych kątowników wyprodukowanych przez hutę są wzajemnie niezależne. To założenie jest dość silne, ale jego przyjęcie ułatwia określenie rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych x i y oraz wyznaczenie rozkładu zmiennej z . Opierając się na tych założeniach, przyjmujemy, że zmienne losowe x i y mają rozkłady Poissona, a zmienna z jako suma niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona ma także rozkład Poissona [5]. Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej z ma zatem postać

$$p_z = e^{-\lambda} \frac{\lambda^z}{z!}, \quad (3.27)$$

przy czym parametr λ , zgodnie z wyrażeniem (3.21), wynosi

$$\lambda = E z = \lambda_x + \lambda_y.$$

Parametry λ_x i λ_y jako wartości oczekiwane zmiennych losowych x i y są równe w przybliżeniu wartościom średnim \bar{x} i \bar{y} tych zmiennych (patrz rozdz. 5). Z informacji podanych w treści przykładu wynika, że średnie wartości obu zmiennych losowych, czyli średnia liczba wadliwych kątowników dostarczonych przez hutę A wynosi (patrz także wyrażenie (3.21))

$$\lambda_x = \bar{x} = n_A q_A, \quad (3.28)$$

a przez hutę B

$$\lambda_y = \bar{y} = n_B q_B, \quad (3.29)$$

gdzie: n_A i n_B – liczby kątowników dostarczonych przez obie huty, q_A i q_B – prawdopodobieństwa tego, że wśród kątowników znajdzie się kątownik wadliwy. Z danych wynika, iż $n_A = 80$, $n_B = 180$, $q_A = 0,020$, $q_B = 0,005$. Po podstawieniu tych wartości do wyrażeń (3.28) i (3.29) otrzymujemy

$$\lambda_x = 80 \cdot 0,020 = 1,6, \quad \lambda_y = 180 \cdot 0,005 = 0,9.$$

Zatem

$$\lambda = 1,6 + 0,9 = 2,5.$$

Wzorowi (3.27) nadajemy więc postać

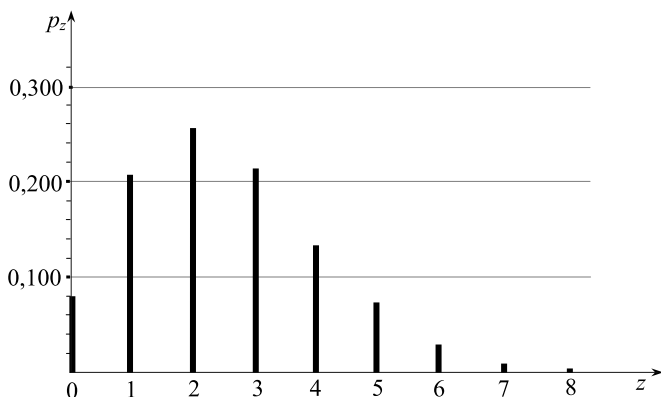
$$p_z = e^{-2,5} \cdot \frac{2,5^z}{z!}. \quad (3.30)$$

Wzór ten określa rozkład zmiennej losowej dyskretnej \mathbf{z} , czyli liczby wadliwych (pod względem wytrzymałości) kątowników, jakie mogą się znaleźć wśród $n = n_A + n_B = 260$ otrzymanych z hut przez firmę produkcyjną. Zmienna ta może przybierać wartości: $z = 0, 1, 2, \dots, 260$.

Ad 2) W celu narysowania wykresu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej \mathbf{z} wyznaczamy wartości tego prawdopodobieństwa dla kilku jej wartości. Korzystamy przy tym ze wzoru (3.30). Wyniki są zamieszczone w tabeli 3.3 i zilustrowane na rysunku 3.8.

Tabela 3.3. Wyniki obliczeń prawdopodobieństwa liczby wadliwych kątowników

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_z	0,082	0,205	0,256	0,214	0,133	0,067	0,028	0,010	0,003



Rys. 3.8. Rozkład prawdopodobieństwa liczby wadliwych kątowników dostarczonych do firmy produkcyjnej

- Z rozkładu prawdopodobieństwa przedstawionego na rysunku 3.8 wynika, że
- moda (dominanta) zmiennej \mathbf{z} , czyli jej wartość, dla której prawdopodobieństwo p_z jest największe, wynosi $\hat{\mathbf{z}} = 2$ (innymi słowy – najbardziej prawdopodobna liczba wadliwych kątowników wśród $n = 260$ otrzymanych to 2),
 - bardzo prawdopodobna liczba wadliwych kątowników zawiera się między 1 i 4 (prawdopodobieństwo tego, że wśród $n = 260$ kątowników jest od 1 do 4 tych elementów niespełniających wymagań, wynosi $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,205 + 0,256 + 0,214 + 0,133 = 0,808$,
 - jest mało prawdopodobne, by wśród kątowników znalazło się 7 lub więcej wadliwych.

PRZYKŁAD 3.12

Firma produkcyjna, o której mowa w przykładzie 3.11, ma możliwość zamówienia w jednej z hut dostawy 260 kątowników o określonym kształcie i wymiarach, wykonanych z duralu 2024 (PA7) o granicy wytrzymałości $R_m = 450$ MPa. Zgodnie z umową huta gwarantuje zapewnienie tej wytrzymałości z prawdopodobieństwem $p = 0,980$. Jednak huta ta jest gotowa zagwarantować spełnienie wymagania dotyczącego granicy R_m z większym prawdopodobieństwem, oczywiście przy zwiększonym koszcie umowy. Firma zamawiająca postanowiła przed podjęciem decyzji o zakupie poznać wpływ zwiększenia prawdopodobieństwa p na prawdopodobieństwo tego, iż we wspomnianej partii 260 kątowników znajdują się co najwyżej 3 kątowniki wadliwe. Należy dokonać takiej analizy.

Rozwiązanie

Liczbę x wadliwych kątowników, które mogą się znaleźć w zamówionej partii $n = 260$ sztuk traktujemy jako zmienną losową. Podobnie jak w przykładzie 3.11, przyjmijmy założenie upraszczające, mówiące o tym, że właściwości wytrzymałościowe poszczególnych kątowników wyprodukowanych przez hutę są wzajemnie niezależne. Opierając się na tych informacjach, przyjmujemy, że zmienna x ma rozkład Poissona, a jej gęstość prawdopodobieństwa ma postać

$$p_x = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad (3.31)$$

gdzie, zgodnie z wyrażeniem (3.21), parametr $\lambda = Ex$ wynosi

$$\lambda = nq = n(1 - p), \quad (3.32)$$

przy czym q jest prawdopodobieństwem tego, że losowo wybrany kątownik ma granicę wytrzymałości $R_m < 450$ MPa (nie spełnia wymagań wytrzymałościowych).

Analizowane prawdopodobieństwo tego, iż w partii 260 kątowników znajdują się co najwyżej 3 kątowniki wadliwe, czyli

$$Q_3 = P\{x \leq 3\},$$

wynosi

$$Q_3 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3.$$

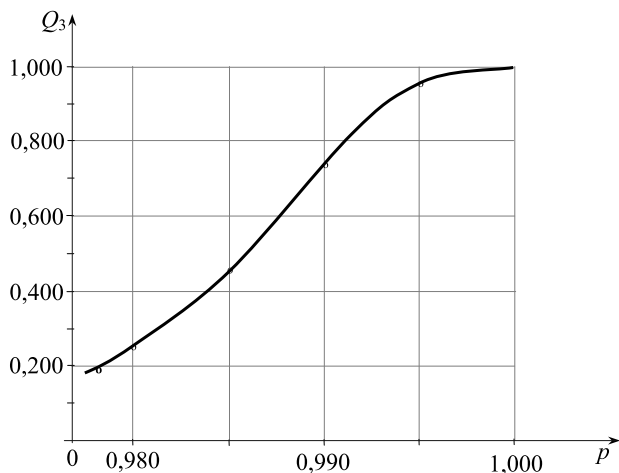
Po uwzględnieniu wzoru (3.31) uzyskujemy

$$Q_3 = e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} \right).$$

Na podstawie tego wyrażenia i przy użyciu wzoru (3.32) wyznaczamy prawdopodobieństwo Q_3 dla kilku wartości prawdopodobieństwa p spełnienia przez hutę wymagań wytrzymałościowych dotyczących granicy R_m . Wyniki obliczeń są zamieszczone w tabeli 3.4, a odpowiedni wykres – na rysunku 3.9.

Tabela 3.4. Wyniki obliczeń prawdopodobieństwa liczby wadliwych kątowników

p	0,980	0,985	0,990	0,995
λ	5,2	3,9	2,6	1,3
Q_3	0,244	0,453	0,736	0,959



Rys. 3.9. Wpływ zwiększenia prawdopodobieństwa p spełnienia wymagań wytrzymałościowych na prawdopodobieństwo znalezienia się w partii 260 kątowników co najwyżej 3 kątowników wadliwych

Jak wynika z uzyskanych rezultatów, analizowany wpływ wielkości p na wielkość Q_3 jest duży. Na przykład zwiększenie prawdopodobieństwa p spełnienia wymagań wytrzymałościowych z wartości 0,98 do wartości 0,99 powoduje trzykrotny wzrost prawdopodobieństwa Q_3 tego, że w partii 260 kątowników nie znajdzie się więcej niż 3 kątowniki wadliwe. Jest to więc wpływ korzystny.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

ROZKŁAD DWUMIANOWY

Zadanie 3.1

Na stole rozłożona jest talia kart licząca 52 sztuki. Korzystając ze wzoru na rozkład dwumianowy, należy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że co najmniej 3 z 4 wylosowanych kart jest asem lub królem.

Zadanie 3.2

Wykonywane jest 6 rzutów monetą. Korzystając ze wzoru na rozkład dwumianowy, wyznacz prawdopodobieństwo tego, że w co najmniej 3 z nich zostanie wyrzucona reszka.

Zadanie 3.3

W pojemniku znajduje się $N = 100$ losów, nieróżniących się wyglądem, a wśród nich jest $N_A = 20$ losów wygranych. Każdy los wygrany opiewa na sumę 1000 zł. Korzystając ze wzoru na rozkład dwumianowy, wyznacz prawdopodobieństwo wygrania:

- 1000 zł w wyniku jednokrotnego losowania,
- 1000 zł w wyniku dwóch losowań,
- 2000 zł w wyniku dwóch losowań.

Zadanie 3.4

Według danych KG Policji w ostatnich latach w Warszawie dochodzi rocznie do około 1500 wypadków drogowych, w wyniku których ginie około 150 osób. Korzystając ze wzoru na rozkład dwumianowy, oszacuj prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 1 dnia nikt w Warszawie nie utraci życia w wyniku wypadków drogowych.

Zadanie 3.5

Według danych KG Policji w ostatnich latach w Warszawie dochodzi rocznie do około 1500 wypadków drogowych, w wyniku których ginie około 150 osób. Przy założeniu, że liczba x ofiar śmiertelnych tych wypadków w ciągu 1 dnia jest opisana przez rozkład dwumianowy, należy sporządzić wykres rozkładu zmiennej losowej x .

Zadanie 3.6

W pewnej firmie jest grupa $n = 10$ stanowisk pracy o jednakowym (w przybliżeniu) poziomie ryzyka zawodowego. Prawdopodobieństwo zajścia wypadku na pojedynczym stanowisku w ciągu 1 roku wynosi $q = 0,07$. Przyjmując, że liczba wypadków w ciągu 1 roku w tej grupie stanowisk pracy jest zmienną losową x o rozkładzie dwumianowym, należy:

- 1) wyznaczyć prawdopodobieństwo Q_1 zajścia w tej grupie stanowisk pracy w ciągu 1 roku co najwyżej 1 wypadku,
- 2) przeanalizować wpływ na prawdopodobieństwo Q_1 prawdopodobieństwa q w przedziale $q = 0,04-0,08$.

Zadanie 3.7

W pewnej firmie jest grupa $n = 10$ stanowisk pracy o jednakowym (w przybliżeniu) poziomie ryzyka zawodowego. Prawdopodobieństwo zajścia wypadku na pojedynczym stanowisku w ciągu 1 roku wynosi $q = 0,07$. Przyjmując, że liczba wypadków w ciągu 1 roku w tej grupie stanowisk

pracy jest zmienną losową x o rozkładzie dwumianowym, należy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 1 roku znajdą w tej grupie stanowisk pracy więcej niż 2 wypadki.

ROZKŁAD POISSONA

Zadanie 3.8

Wykonywane jest 6 rzutów monetą. Korzystając ze wzoru na rozkład Poissona, należy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że w co najmniej 3 z nich zostanie wyrzucona reszka.

Zadanie 3.9

Prawdopodobieństwo przerwania wałów przeciwpowodziowych w gminie w ciągu 1 roku wynosi 0,03. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 20 lat nie dojdzie w gminie do przerwania wałów. Zastosuj wzór na rozkład dwumianowy i wzór na rozkład Poissona. Porównaj wyniki.

Zadanie 3.10

W pewnym dużym przedsiębiorstwie produkcyjnym rejestrowano przez 8 lat wypadki zachodzące w dwóch różniących się grupach stanowisk pracy o liczebnościach odpowiednio 100 i 60. W pierwszej z nich zanotowano w tym czasie 6 wypadków, a w drugiej – 3. Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa liczby wypadków w ciągu 1 roku w obu grupach stanowisk w sumie.

Zadanie 3.11

Firma produkcyjna, o której mowa w przykładzie 3.11, zamówiła w dwóch hutach $n = 260$ kątowników z duralu. Rozkład prawdopodobieństwa liczby znajdujących się wśród nich kątowników wadliwych, niespełniających wymagań dotyczących granicy wytrzymałości doraźnej R_m , ma rozkład Poissona przedstawiony na rysunku 3.8. Należy zbadać, jak zmieniłyby się ten rozkład, gdyby firma zamówiła wszystkie kątowniki tylko w jednej z hut, mianowicie tej, która gwarantuje zapewnienie granicy wytrzymałości $R_m = 450$ MPa z prawdopodobieństwem 0,995.

Zadanie 3.12

Pewien lekkoatleta przekracza w rzucie młotem 80 metrów ze średnią częstością 60%. W czasie zawodów *Diamentowej Ligi* wykonuje 6 rzutów. Przyjmując, że liczba x rzutów na odległość większą niż 80 m jest zmienną losową x o rozkładzie Poissona, należy wyznaczyć rozkład tej zmiennej i wynik zilustrować w postaci wykresu tego rozkładu. Uzyskany wynik porównaj z wynikiem rozwiązania przykładu 3.1. Jaka jest przyczyna różnicy?

Zadanie 3.13

Według danych KG Policji w ostatnich latach w Warszawie dochodzi rocznie do około 1500 wypadków drogowych, w wyniku których ginie około 150 osób. Przy założeniu, że liczba x ofiar śmiertelnych tych wypadków w ciągu 1 dnia jest opisana przez rozkład Poissona, należy sporządzić wykres rozkładu zmiennej losowej x . Porównaj z wykresem sporządzonym w zadaniu 3.5.

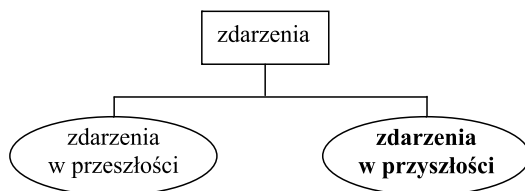
Zadanie 3.14

Na 1000 jednakowych próbek wykonanych z pewnej stali wykonywane są próby wytrzymałości na rozciąganie pod określonym obciążeniem. Na podstawie wcześniejszych badań oszacowano, że prawdopodobieństwo pęknięcia próbki w trakcie badań może wynosić 0,002. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo, iż spośród 1000 badanych próbek więcej niż dwie ulegną pęknięciu. Dokonać tego przy założeniu, że liczba pękniętych próbek ma rozkład Poissona oraz że ma ona rozkład dwumianowy. Porównać uzyskane wyniki.

ZDARZENIA LOSOWE

4.1. POJĘCIE ZDARZENIA LOSOWEGO I PRAWDOPODOBIENSTWA ZDARZENIA LOSOWEGO

Zdarzeniem nazywa się wynik określonego doświadczenia, obserwacji lub działania, a zbiór wszystkich możliwych takich wyników jest nazywany przestrzenią zdarzeń elementarnych. Zdarzenia, które się mogą wydarzyć w przyszłości, mają dla człowieka charakter losowy (rys. 4.1). Zdarzenia, które zaszły już w przeszłości, nie mają takiego charakteru i są faktami, mogącymi mieć znaczenie historyczne – dla pojedynczego człowieka, dla określonej społeczności, narodu lub ludzkości.



Rys. 4.1. Rodzaje zdarzeń

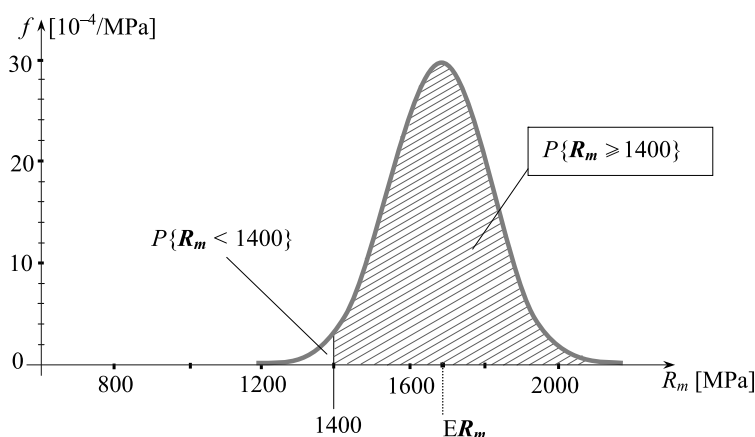
Każde zdarzenie, zarówno to, które się już wydarzyło, jaki i to, które się ewentualnie dopiero wydarzy, może być dla człowieka zdarzeniem pożądanym lub zdarzeniem niepożądanym.

W niniejszym opracowaniu zajmujemy się takimi zdarzeniami, które mogą wystąpić w przyszłości i których czasu oraz skutków wystąpienia człowiek, ze względu na swoje ograniczenia, nie jest w stanie jednoznacznie przewidzieć. Nazywamy je zdarzeniami losowymi, i to nimi zajmuje się probablistyka.

W dalszym tekście zdarzenia losowe są oznaczane na ogół symbolem A , a czasami inną dużą literą pogrubioną (pogrubienie oznacza losowość zdarzenia).

Przykładem zdarzenia losowego jest zdarzenie analizowane w przykładzie 2.2, polegające na tym, że materiał pojedynczego płaskownika, losowo wybranego z pojemnika identycznych płaskowników, ma granicę wytrzymałości równą co najmniej $R_m = 1400$ MPa (rys. 4.2), czyli zdarzenie

$$A = (R_m \geq 1400 \text{ MPa}). \quad (4.1)$$



Rys. 4.2. Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego $A = (R_m \geq 1400 \text{ MPa})$ na tle wykresu gęstości prawdopodobieństwa granicy R_m wytrzymałości stali

Inne przykłady zdarzeń losowych A :

- $w \geq 5$, gdzie w jest zmienną losową określającą liczbę wypadków w firmie w ciągu 1 roku,
- $T < 2$ lata, gdzie T zmienna losowa równa trwałości urzędnika,
- uszkodzenie urządzenia,
- popełnienie błędu przez pracownika na stanowisku pracy,
- zajęcie wypadku drogowego,
- przerwanie tamy.

Bywają zdarzenia, które uznaje się za pewne, i takie, które uznaje się za zdarzenia niemożliwe. Zdarzeniem pewnym może być na przykład wyciągnięcie z pojemnika płaskownika, którego granica $R_m \geq 0$. Przykładem zdarzenia niemożliwego może być wyrzucenie w jednym rzucie orła i reszki.

Są zdarzenia elementarne oraz zdarzenia złożone, złożone ze zdarzeń elementarnych i stanowiące podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych.

Przyjęło się stosować symbol \bar{A} do oznaczania **zdarzenia przeciwnego** do określonego zdarzenia A . Zdarzeniem przeciwnym w stosunku do zdarzenia (4.1) jest zdarzenie $\bar{A} = R_m < 1400$. Innym przykładem zdarzeń przeciwnych jest orzeł i reszka w rzucie monetą.

Jeśli jednocześnie zajście zdarzeń A i B nie jest możliwe, to mówimy, że są one **rozłączne**. Zdarzeniami rozłącznymi są na przykład: wspomniane już zdarzenie (4.1) i zdarzenie do niego przeciwne $\bar{A} = R_m < 1400$.

Miarą możliwości zajścia zdarzenia losowego jest wielkość matematyczna nazywana **prawdopodobieństwem zdarzenia**. W celu zmniejszenia abstrakcyjności tego pojęcia definiuje się je zwykle poprzez pojęcie częstości (patrz rozdz. 1) i formułuje się tak zwaną klasyczną definicję prawdopodobieństwa w formie wzoru

$$P\{A\} = \frac{N_A}{N}, \quad (4.2)$$

gdzie: N – liczba wszystkich jednakowo możliwych zdarzeń (wyników pomiarów, doświadczeń, obserwacji,...), czyli liczebność **populacji generalnej**, N_A – liczba zaistnień zdarzeń sprzyjających zajściu określonego zdarzenia A .

Jeśli liczebność całej populacji jest nieograniczona, to wzorowi (4.2) nadaje się postać

$$P\{A\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N}, \quad (4.3)$$

przy czym N jest liczebnością **próbki losowej** (statystycznej – patrz rozdz. 5).

Pojęcie prawdopodobieństwa było już używane również w odniesieniu do zmiennych losowych (rozdz. 2 i 3).

Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe jedności, a prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego wynosi zero. Zatem wartości prawdopodobieństwa zdarzenia losowego, np. zdarzenia A , są zawarte w przedziale

$$0 \leq P\{A\} \leq 1.$$

4.2. DZIAŁANIA NA ZDARZENIACH LOSOWYCH

Na zdarzeniach są wykonywane operacje. Najważniejsze z nich to: **suma zdarzeń** oznaczana symbolem $A \cup B$ oraz **iloczyn zdarzeń** oznaczany symbolem $A \cap B$. Suma zdarzeń $A \cup B$ to takie zdarzenie, które polega na zajściu zdarzenia A albo zdarzenia B , a iloczyn zdarzeń $A \cap B$ oznacza zajście zdarzenia A i zdarzenia B . Spójniki „albo” oraz „i” są tu użyte w sensie matematycznym – jako suma logiczna oraz iloczyn logiczny.

Przykładem zdarzenia, które jest sumą zdarzeń, może być niespełnienie warunku $R_m \geq 1400$ MPa przez płaskownik pobrany losowo z pojemnika (zdarze-

nie A) albo przez drugi taki sam pobrany płaskownik albo przez oba wyciągnięte płaskowniki.

Przykładem iloczynu zdarzeń może być niespełnienie wspomnianego warunku wytrzymałościowego przez pierwszy płaskownik pobrany z pojemnika (zdarzenie A) oraz także przez drugi pobrany płaskownik (zdarzenie B).

Poniżej przedstawione są najważniejsze relacje matematyczne umożliwiające wyznaczanie prawdopodobieństwa zdarzenia, będącego rezultatem działań na innych zdarzeniach. Zbiór tego rodzaju relacji jest niekiedy nazywany algebrą zdarzeń.

1. Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń A i B

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}. \quad (4.4)$$

Z tego wzoru wynikają następujące związki:

$$P\{A \cup B\} \leq P\{A\} + P\{B\}, \quad (4.5)$$

$$P\{A \cup \bar{A}\} = 1, \quad (4.6)$$

a w przypadku zdarzeń rozłącznych A i B (czyli takich, że $P\{A \cap B\} = 0$)

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}. \quad (4.7)$$

Jeśli suma zdarzeń rozłącznych jest zdarzeniem pewnym, to zdarzenia te tworzą zupełny układ zdarzeń. Najprostszym przykładem zupełnego układu zdarzeń są zdarzenia A i \bar{A} .

2. Prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń A i B

$$P\{A \cap B\} = P\{A\}P\{B|A\}, \quad (4.8)$$

gdzie $P\{B|A\}$ to prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia B pod warunkiem, że nastąpiło zdarzenie A .

Zdarzenie B nazywamy niezależnym od zdarzenia A , jeśli nastąpienie zdarzenia A nie zmienia prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia B , tj.

$$P\{B|A\} = P\{B\}. \quad (4.9)$$

W tym przypadku wyrażenie (4.8) przybiera postać

$$P\{A \cap B\} = P\{A\}P\{B\}. \quad (4.10)$$

3. Jeśli zdarzenie B może zajść z jednym z n rozłącznych zdarzeń A_1, A_2, \dots, A_n , to prawdopodobieństwo zdarzenia B jest określone przez następujący wzór na **prawdopodobieństwo zupełne**

$$P\{B\} = \sum_{i=1}^n P\{A_i\}P\{B|A_i\}. \quad (4.11)$$

PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 4.1

Należy obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w rezultacie wylosowania jednej karty z talii 52 kart otrzyma się kartę pik.

Rozwiązanie

Do obliczenia prawdopodobieństwa tego, że wylosuje się kartę pik, zastosujemy wzór (4.2)

$$P\{A\} = \frac{N_A}{N}, \quad (4.12)$$

gdzie: A – zdarzenie polegające na wylosowaniu karty pik, $N = 52$ – liczba wszystkich kart (populacja generalna) i każda z nich jest jednakowo możliwa do wylosowania, $N_A = 13$ – liczba tych kart, które są w kolorze pik, czyli sprzyjających wylosowaniu karty w tym kolorze.

Zatem

$$P\{A\} = \frac{13}{52} = 0,25.$$

PRZYKŁAD 4.2

Wśród 1000 jednakowych uszczelki zapasowych trzymany w pojemniku 20 sztuk jest wadliwych. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że losowo pobrana z pojemnika jedna uszczelka jest wadliwa.

Rozwiązanie

Prawdopodobieństwo wylosowania z pojemnika wadliwej uszczelki (zdarzenia A) wyznaczamy w taki sposób, jaki został zastosowany w przykładzie 4.1. Wynosi ono

$$P\{A\} = \frac{20}{1000} = 0,02.$$

PRZYKŁAD 4.3

Prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na przedłużeniu się akcji ratowniczej ponad 1 godzinę wynosi 21% (przykład 2.9). Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że akcja ratownicza skończy się przed upływem 1 godziny.

Rozwiązanie

Zdarzenie polegające na przedłużeniu się akcji ratowniczej ponad 1 godzinę oznaczmy symbolem A . Celem w przykładzie jest wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzenia przeciwnego do A , czyli zdarzenia \bar{A} . Zdarzenia A i \bar{A} są zdarzeniami rozłącznymi, zatem na podstawie wzorów (4.6) i (4.7) stwierdzamy, że

$$P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\}.$$

Po podstawieniu do tego wyrażenia wartości $P\{A\} = 0,21$ otrzymujemy poszukiwane prawdopodobieństwo

$$P\{\bar{A}\} = 1 - 0,21 = 0,79.$$

PRZYKŁAD 4.4

Według opinii ekspertów analizujących bezpieczeństwo pewnego operatora koparki, podczas przerwy śniadaniowej może być on narażony na dwa rodzaje wypadków:

A – upadek wskutek poślizgnięcia się lub potknięcia,

B – potrącenie przez przejeżdżający pojazd.

Prawdopodobieństwa zajścia każdego z nich w ciągu 1 roku, oszacowane w sposób ekspercki (patrz podrozdz. 5.4), wynoszą odpowiednio: $q_A = 50 \cdot 10^{-6}$, $q_B = 12 \cdot 10^{-6}$. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo ulegnięcia wypadkowi przez pracownika podczas przerw śniadaniowych w ciągu 1 roku.

Rozwiązanie

Celem w tym przykładzie jest wyznaczenie prawdopodobieństwa sumy zdarzeń A i B , czyli prawdopodobieństwa $P\{A \cup B\}$. Założmy, że oba rozpatrywane zdarzenia są wzajemnie niezależne, ale nie są rozłączne. Zgodnie ze wzorem (4.4)

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}. \quad (4.13)$$

Prawdopodobieństwa zajścia zdarzeń A i B w ciągu 1 roku są znane i wynoszą: $P\{A\} = q_A = 50 \cdot 10^{-6}$, $P\{B\} = q_B = 12 \cdot 10^{-6}$. Prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń A i B , czyli obu wypadków w czasie przerwy śniadaniowej, byłoby równe zero, gdyby zdarzenia były rozłączne. Przy przyjętym założeniu o niezależności i nierozłączności tych zdarzeń

$$P\{A \cap B\} = P\{A\}P\{B|A\} = P\{A\}P\{B\}, \quad (4.14)$$

co wynika ze wzorów (4.8) i (4.9). Po podstawieniu do wyrażenia (4.14) danych otrzymujemy

$$P\{A \cap B\} = q_A q_B = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \cdot 10^{-6} = 0,0006 \cdot 10^{-6}.$$

W rezultacie podstawienia tej wartości i pozostałych danych do wyrażenia (4.13) uzyskujemy

$$P\{A \cup B\} = 50 \cdot 10^{-6} + 12 \cdot 10^{-6} - 0,0006 \cdot 10^{-6} \approx 62 \cdot 10^{-6}.$$

Tyle wynosi prawdopodobieństwo ulegnięcia wypadkowi przez pracownika podczas przerw śniadaniowych w ciągu 1 roku.

PRZYKŁAD 4.5

Pracownik wchodzi na trzymetrową drabinę w celu naprawy oświetlenia. W trakcie wymiany świetlówki może ulec wypadkowi, albo wskutek porażenia prądem (zdarzenie A) albo wskutek upadku z drabiny (zdarzenie B). Porażenie prądem podczas jednokrotnej wymiany świetlówki może zajść z prawdopodobieństwem $q_A = 0,03 \cdot 10^{-6}$, a upadek z drabiny – z prawdopodobieństwem $q_B = 0,20 \cdot 10^{-6}$. Zakładając, że zdarzenia te są niezależne, należy obliczyć prawdopodobieństwo ulegnięcia wypadkowi przez pracownika podczas jednokrotnego wykonania wspomnianej czynności.

Rozwiązanie

Celem w tym przykładzie jest wyznaczenie prawdopodobieństwa ulegnięcia wypadkowi przez pracownika podczas umownej jednostki czasu, jaką jest jednokrotne wykonanie czynności wymiany świetlówki przez pracownika. Zauważmy, że wypadek ten jest sumą niezależnych zdarzeń A i B . Załóżmy ponadto, że zdarzenia te są rozłączne, co oznacza, iż $P\{A \cap B\} = 0$. Zatem wzór (4.4) sprowadza się do wzoru

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}.$$

Wobec tego

$$P\{A \cup B\} = q_A + q_B = 0,03 \cdot 10^{-6} + 0,20 \cdot 10^{-6} = 0,23 \cdot 10^{-6}.$$

PRZYKŁAD 4.6

Podczas modelowania ryzyka zawodowego dla określonego stanowiska pracy zespół ekspertów wyróżnił dwa zdarzenia niepożądane, które mogą się pojawić przy wykonywaniu przez pracownika określonej czynności, i oszacował (patrz podrozdz. 5.4), że prawdopodobieństwo zajścia w ciągu 1 roku pierwszego z tych zdarzeń wynosi $2 \cdot 10^{-3}$, a drugiego z nich $5 \cdot 10^{-3}$. Ekspertci oszacowali także, że prawdopodobieństwo utraty życia przez pracownika wskutek zajścia pierwszego

zdarzenia wynosi 0,50, a skutek zajścia drugiego – 0,10. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo utraty życia przez pracownika w ciągu 1 roku wykonywania wspomnianej czynności.

Rozwiązanie

Oznaczmy symbolem B zdarzenie polegające na utracie życia przez pracownika. Utrata życia może być spowodowana skutkiem zajścia pierwszego z wymienionych w treści przykładu zdarzeń, oznaczmy je symbolem A_1 , albo (w sensie matematycznym) skutek zajścia drugiego z nich, przypiszmy mu symbol A_2 . Załóżmy, że są one niezależne i rozłączne. Są więc spełnione warunki do zastosowania wzoru (4.11) na prawdopodobieństwo zupełne. W odniesieniu do analizowanego stanowiska pracy wzór ten przybiera postać

$$P\{B\} = P\{A_1\}P\{B|A_1\} + P\{A_2\}P\{B|A_2\} \quad [1/\text{rok}]. \quad (4.15)$$

Po prawej stronie tego wyrażenia występują cztery wielkości o wartościach podanych w treści przykładu, mianowicie:

$$P\{A_1\} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ 1/rok}, \quad P\{B|A_1\} = 0,50,$$

$$P\{A_2\} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ 1/rok}, \quad P\{B|A_2\} = 0,10.$$

Po podstawieniu tych wartości do wzoru (4.15) otrzymujemy

$$P\{B\} = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,50 + 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,10 = 1,5 \cdot 10^{-3}.$$

Zatem prawdopodobieństwo utraty życia przez pracownika w ciągu 1 roku wykonywania czynności, wspomnianej w treści przykładu, wynosi $1,5 \cdot 10^{-3}$.

PRZYKŁAD 4.7

Prawdopodobieństwo przekroczenia w ciągu 1 roku poziomu alarmowego przez rzekę w pewnej gminie wynosi 0,1, a prawdopodobieństwo przerwania wałów przeciwpowodziowych w tej sytuacji wynosi 0,15. Wyznacz prawdopodobieństwo przerwania wałów przeciwpowodziowych w gminie w ciągu 2 lat.

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że przekroczenie poziomu alarmowego przez rzekę w jednym roku i w drugim roku są zdarzeniami niezależnymi. Załóżmy, że są również rozłączne (wpływ tego założenia na wynik obliczeń jest niewielki, gdyż prawdopodobieństwo takiego zdarzenia w dwóch kolejnych latach jest względnie nieduże – $0,1 \cdot 0,1 = 0,01$). Na tej podstawie należy uznać, iż prawdopodobieństwo

zajścia takiego zdarzenia w ciągu 2 lat (oznaczymy je symbolem A) jest prawdopodobieństwem sumy zdarzeń, określonym przez wyrażenie (4.7). Stąd

$$P\{A\} = 0,1 + 0,1 = 0,2.$$

Zdarzenie polegające na przerwaniu wałów oznaczmy symbolem B . Zdarzenie to jest zależne od zdarzenia A . Zakładamy, że do przerwania wałów może dojść pod warunkiem przekroczenia przez rzekę poziomu alarmowego i że nie dochodzi w sytuacji, gdy takiego przekroczenia nie ma. Zatem

$$P\{B|A\} = 0,15, \quad P\{B|\bar{A}\} = 0.$$

W celu wyznaczenia prawdopodobieństwa przerwania wałów można skorzystać na przykład ze wzoru (4.11) na prawdopodobieństwo zupełne, w rozważanym przypadku o postaci

$$P\{B\} = P\{A\}P\{B|A\} + P\{\bar{A}\}P\{B|\bar{A}\}.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy prawdopodobieństwo przerwania wałów przeciwpowodziowych w gminie w ciągu 2 lat

$$P\{B\} = 0,2 \cdot 0,15 + (1 - 0,2) \cdot 0 = 0,03.$$

PRZYKŁAD 4.8

Według danych KG Policji dotyczących wypadków drogowych w Polsce liczba najechań na pieszego przypadająca na jeden samochód osobowy w 2018 roku wynosiła $w = 180 \cdot 10^{-6}$. Prawdopodobieństwo utraty życia przez najechanego pieszego wzrasta wraz z prędkością najechania, co jest pokazane na rysunku 4.3 wynikającym z danych statystycznych. Przy założeniu, że średnia prędkość najechania wynosi 60 km/h, należy oszacować prawdopodobieństwo spowodowania śmierci pieszego przez jeden samochód osobowy w ciągu 1 roku w Polsce.

Rozwiązanie

Do utraty życia przez pieszego potrąconego przez samochód dochodzi w rezultacie iloczynu dwóch zdarzeń:

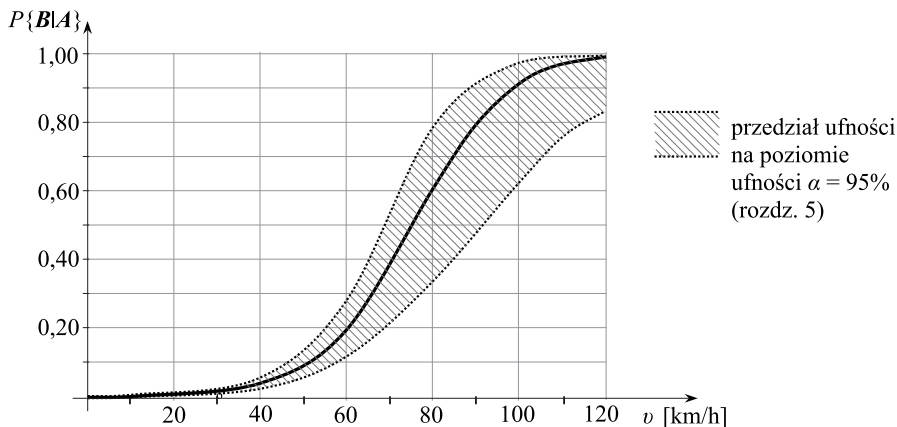
A – najechanie na pieszego z określoną prędkością v ,

B – utrata życia przez pieszego jako skutek najechania przez samochód.

Zatem do oszacowania poszukiwanego prawdopodobieństwa $P\{A \cap B\}$ tego, że samochód najedzie w ciągu 1 roku na pieszego z prędkością 60 km/h (zdarzenie A) i w rezultacie pieszy zginie (zdarzenie B), zastosujemy wzór (4.8)

$$P\{A \cap B\} = P\{A\}P\{B|A\} \quad (4.16)$$

gdzie $P\{B|A\}$ to prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia B pod warunkiem, że nastąpiło zdarzenie A .



Rys. 4.3. Zależność prawdopodobieństwa utraty życia przez pieszego najechanego przez samochód osobowy od prędkości najechania

Przyjmijmy, że prawdopodobieństwo $P\{A\}$ jest w przybliżeniu równe częstotliwości $w = 180 \cdot 10^{-6}$ zarejestrowanej w 2018 roku (patrz wzór 4.2). Prawdopodobieństwo warunkowe $P\{B|A\}$ wynika z wykresu na rysunku 4.3 i dla prędkości $v = 60$ km/h przyjmijmy, że wynosi około 0,19.

Po podstawieniu danych do wzoru (4.16) otrzymujemy poszukiwane prawdopodobieństwo zabicia pieszego przez jeden samochód osobowy w Polsce w ciągu 1 roku

$$P\{A \cap B\} = 180 \cdot 10^{-6} \cdot 0,19 \approx 34 \cdot 10^{-6}.$$

PRZYKŁAD 4.9

Obiekt składa się z trzech zespołów. Czas funkcjonowania bez niesprawności każdego z zespołów jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda = 2 \cdot 10^{-6}$ 1/h (jednakowym w odniesieniu do każdego z nich). Niesprawność dowolnego zespołu powoduje niesprawność całego obiektu. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo poprawnego funkcjonowania obiektu w czasie $t_k = 10000$ h.

Rozwiązanie

Rozwiązanie tego przykładu można uzyskać kilkoma sposobami. Przed decyzją o wyborze sposobu wprowadźmy oznaczenia zdarzeń:

- \bar{A} – pojawienie się niesprawności (np. uszkodzenia) obiektu w czasie t_k ,
- A – zdarzenie przeciwne w stosunku do \bar{A} ,
- $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ – pojawienie się w czasie t_k niesprawności 1., 2. i 3. zespołu obiektu,
- A_1, A_2, A_3 – zdarzenia przeciwne w stosunku do zdarzeń $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$.

Przyjmijmy założenie, że czasy T_1, T_2, T_3 funkcjonowania poszczególnych zespołów są zmiennymi losowymi niezależnymi (rozdz. 2). Oznacza to, iż także zdarzenia $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ są niezależne, a w konsekwencji również to, iż nie ma zależności między zdarzeniami A_1, A_2, A_3 .

Celem przykładu jest wyznaczenie prawdopodobieństwa $P\{A\}$. Jak wynika z treści przykładu, zajście zdarzenia A jest równoznaczne z zajściem iloczynu zdarzeń A_1, A_2, A_3 . Do wyznaczenia prawdopodobieństwa $P\{A\}$ zastosujemy sposób oparty na wzorze (4.10) dotyczącym prawdopodobieństwa iloczynu zdarzeń niezależnych. W rozważanym przypadku nadajemy mu postać

$$P\{A\} = P\{A_1 \cap A_2 \cap A_3\} = P\{A_1\}P\{A_2\}P\{A_3\}. \quad (4.17)$$

Prawdopodobieństwo niewystąpienia niesprawności 1. zespołu w czasie t_k jego funkcjonowania wynosi

$$P\{A_1\} = P\{T_1 > t_k\} = 1 - P\{T_1 \leq t_k\} = 1 - Q(t_k), \quad (4.18)$$

gdzie $Q(t_k)$ jest dystrybuantą zmiennej losowej T_1 (rozdz. 2). Zmienna ta ma rozkład wykładniczy, zatem zgodnie ze wzorem (2.91)

$$Q(t_k) = 1 - e^{-\lambda t_k}.$$

Stąd

$$P\{A_1\} = e^{-\lambda t_k}.$$

Identyczny wzór uzyskujemy w odniesieniu do pozostałych dwóch zdarzeń (zespołów). W rezultacie wyrażenie (4.17) przybiera postać

$$P\{A\} = e^{-3\lambda t_k}.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy prawdopodobieństwo poprawnego funkcjonowania obiektu w czasie $t_k = 10000$ h

$$P\{A\} = e^{-3 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10000} = e^{-0,06} = 0,94.$$

PRZYKŁAD 4.10

W pojemniku znajduje się 50 jednakowych kątowników, wykonanych z duralu 2024 (PA7) o granicy wytrzymałości $R_m = 450$ MPa. Huta, która je dostarczyła, gwarantuje zapewnienie tej wytrzymałości z prawdopodobieństwem $p = 0,98$. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że dwa kątowniki losowo wyjęte z pojemnika będą miały granicę wytrzymałości nie mniejszą niż 450 MPa.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez:

B – zdarzenie polegające na tym, że obydwa kątowniki wyjęte z pojemnika są dobre, tzn. spełniają wymaganie dotyczące granicy wytrzymałości,

B_1 – wyjęcie z pojemnika dobrego pierwszego kątownika,

B_2 – wyjęcie z pojemnika dobrego drugiego kątownika.

Aby zaszło zdarzenie B , konieczne jest zajście zarówno zdarzenia B_1 , jak i zdarzenia B_2 . Zdarzenie B jest więc iloczynem (logicznym) tych zdarzeń, zdarzeń rozłącznych, zatem zgodnie z wyrażeniem (4.8)

$$P\{B\} = P\{B_2 \cap B_1\} = P\{B_1\}P\{B_2|B_1\}, \quad (4.19)$$

gdzie $P\{B_2|B_1\}$ to prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia B_2 pod warunkiem, że nastąpiło zdarzenie B_1 .

Przyjmijmy założenie (upraszczające), że przed pobraniem pierwszego kątownika w partii 50 kątowników znajduje się dokładnie taka liczba dobrych kątowników, która wynika z prawdopodobieństwa p . Stąd

$$P\{B_1\} = p = 0,98.$$

Prawdopodobieństwo tego, że drugi pobrany kątownik też będzie dobry nie jest równe p , czyli $P\{B_2|B_1\} \neq p$. Po pobraniu pierwszego kątownika zmienia się bowiem wadliwość pozostałych 49 kątowników w pojemniku, gdyż zmniejszyła się liczba kątowników dobrych w stosunku do liczby kątowników niespełniających wymagań. Prawdopodobieństwo $P\{B_2|B_1\}$ wyznaczmy, opierając się na wzorze (4.2). W rozważanym przypadku wzór ten przybiera postać

$$P\{B_2|B_1\} = \frac{N_B}{N},$$

gdzie: $N = 49$ – liczba kątowników w pojemniku przed wyjęciem drugiego, N_B – liczba kątowników dobrych wśród N . Liczba N_B wynosi

$$N_B = 50p - 1 = 50 \cdot 0,98 - 1 = 48.$$

Zatem

$$P\{B_2|B_1\} = \frac{48}{49}.$$

Po podstawieniu wartości wielkości $P\{B_1\}$ i $P\{B_2|B_1\}$ do wyrażenia (4.19) otrzymujemy

$$P\{B\} = 0,98 \cdot \frac{48}{49} = 0,96.$$

PRZYKŁAD 4.11

Prawdopodobieństwo wykrycia przez służby radiolokacyjne wystrzelonej rakiety wynosi $r_w = 0,95$. Na trasie lotu rakiet znajdują się dwie wyrzutnie przeciwraket. Prawdopodobieństwo strącenia wykrytej rakiety przy użyciu pierwszej wyrzutni $r_{s1} = 0,97$. W przypadku niestrącenia rakiety zadanie strącenia przejmie druga wyrzutnia. Prawdopodobieństwo pomyślnego wykonania tego zadania przez tę wyrzutnię $r_{s2} = 0,85$. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo strącenia rakiety.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez:

A – wykrycie wystrzelonej rakiety,

B – zdarzenie polegające na trafieniu przez przeciwraketę w wykrytą rakietę.

Zakładamy, że strącenie rakiety niewykrytej nie jest możliwe. Jeden ze sposobów rozwiązania przykładu wynika ze stwierdzenia, że do strącenia rakiety dochodzi, jeśli zajdą oba zdarzenia, tzn. zdarzenie A i zdarzenie B . Poszukujemy więc prawdopodobieństwa p iloczynu tych zdarzeń, czyli wielkości

$$p = P\{A \cap B\}.$$

Zdarzenia A i B są niezależne, stąd

$$p = P\{A\}P\{B\}. \quad (4.20)$$

Prawdopodobieństwo wykrycia wystrzelonej rakiety jest znane i wynosi

$$P\{A\} = r_w. \quad (4.21)$$

Zdarzenie B może zajść z dwoma rozłącznymi zdarzeniami: zdarzeniem B_1 polegającym na trafieniu w rakietę przez 1. wyrzutnię przeciwraket i zdarzeniem \bar{B}_1 polegającym na niepowodzeniu tej akcji i przejęciu zadania przez drugą wyrzutnię. Zatem, do wyznaczenia prawdopodobieństwa $P\{B\}$ możemy zastosować wzór (4.11) na prawdopodobieństwo zupełne. W rozważanym przypadku ma on postać

$$P\{B\} = P\{B_1\}P\{B|B_1\} + P\{\bar{B}_1\}P\{B|\bar{B}_1\},$$

gdzie:

$$P\{B_1\} = r_{s1}, \quad P\{B|B_1\} = 1, \quad P\{\bar{B}_1\} = 1 - r_{s1}$$

oraz $P\{B|\bar{B}_1\} = P\{B_2\} = r_{s2}$.

Stąd

$$P\{\mathbf{B}\} = r_{s1} + (1 - r_{s1})r_{s2} \dots$$

W rezultacie podstawieniu tego wyrażenia i wyrażenia (4.21) do wzoru (4.20) uzyskujemy

$$p = r_w [r_{s1} + (1 - r_{s1})r_{s2}],$$

a po podstawieniu danych

$$p = 0,95[0,97 + (1 - 0,97) \cdot 0,85] = 0,946.$$

Prawdopodobieństwo zestrzelenia rakiety wynosi więc $p = 0,946$.

PRZYKŁAD 4.12

Układ napędu samolotu sportowego składa się z dwóch jednakowych silników. Prawdopodobieństwo awarii silnika podczas 1 lotu (uśrednionego) wynosi $q_1 = 0,5 \cdot 10^{-6}$, a prawdopodobieństwo awarii drugiego silnika w tej sytuacji wynosi $q_2 = 6 \cdot 10^{-6}$. Awaria jednego silnika w czasie lotu może spowodować wypadek z prawdopodobieństwem $Z_1 = 0,10$, a prawdopodobieństwo zaistnienia wypadku, gdy oba silniki uległy awarii, wynosi $Z_2 = 0,98$. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo zaistnienia wypadku lotniczego podczas jednego lotu wskutek awarii układu napędu.

Rozwiązanie

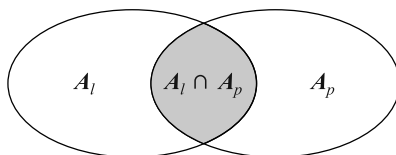
Wprowadźmy oznaczenia:

A_l – awaria lewego silnika,

A_p – awaria prawego silnika,

\mathbf{B} – zajście wypadku wskutek awarii układu napędu samolotu.

Związki między zdarzeniami niepożądanymi w układzie napędu samolotu, opisane w treści przykładu, można przedstawić w sposób poglądowy, jak na rysunku 4.4.



Rys. 4.4. Graficzna ilustracja związków między awariami w układzie napędu samolotu

Zdarzenie B , czyli wypadek lotniczy, może zajść z jednym z trzech rozłącznych zdarzeń wyszczególnionych na rysunku. Zatem możemy skorzystać ze wzoru (4.11) na prawdopodobieństwo zupełne, który w tym przypadku ma postać

$$P\{B\} = P\{A_l\}P\{B|A_l\} + P\{A_p\}P\{B|A_p\} + P\{A_l \cap A_p\}P\{B|A_l \cap A_p\}. \quad (4.22)$$

W wyrażeniu tym znane są prawdopodobieństwa: $P\{A_l\} = P\{A_p\} = q_1$, $P\{B|A_l\} = P\{B|A_p\} = Z_1$, $P\{B|A_l \cap A_p\} = Z_2$. W rezultacie ich wstawienia do wzoru (4.22) wzór ten przybiera postać

$$P\{B\} = 2q_1Z_1 + P\{A_l \cap A_p\}Z_2. \quad (4.23)$$

Zdarzenie $\{A_l \cap A_p\}$, czyli awaria obu silników w czasie lotu, może zajść z jednym z dwóch rozłącznych zdarzeń: $\{A_l \cap A_p|A_l\}$ oraz $\{A_l \cap A_p|A_p\}$. Zatem, korzystając ponownie ze wzoru (4.11) na prawdopodobieństwo zupełne, piszemy

$$\begin{aligned} P\{A_l \cap A_p\} &= P\{A_l\}P\{A_l \cap A_p|A_l\} + P\{A_p\}P\{A_l \cap A_p|A_p\} = \\ &= P\{A_l\}P\{A_p|A_l\} + P\{A_p\}P\{A_l|A_p\} = 2q_1q_2. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$P\{B\} = 2q_1Z_1 + 2q_1q_2Z_2.$$

Po podstawieniu do tego wyrażenia danych otrzymujemy poszukiwane prawdopodobieństwo zaistnienia wypadku samolotu podczas jednego lotu wskutek awarii układu napędu

$$\begin{aligned} P\{B\} &= 2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,10 + 2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 0,98 = \\ &= 0,10 \cdot 10^{-6} + 0,000006 \cdot 10^{-6} \approx 0,10 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

(przy użyciu metody opartej na zasadach algebry zdarzeń)

Zadanie 4.1

Na stole rozłożona jest talia kart licząca 52 sztuki. Korzystając ze wzoru na rozkład dwumianowy, należy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że co najmniej 3 z 4 wylosowanych kart jest asem lub królem.

Zadanie 4.2

Z każdej z dwóch 52-kartowych talii wyciągnięto losowo po jednej karcie. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że wyciągnięte karty to as lub król.

Zadanie 4.3

Z talii kart wyciągnięto asa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że następna losowo pobrana karta jest także asem?

Zadanie 4.4

System składa się z dwóch identycznych elementów. Trwałość każdego z nich ma rozkład wykładniczy o parametrze $\lambda = 0,005$ 1/h. Uszkodzenie dowolnego z elementów powoduje uszkodzenie całego systemu. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo uszkodzenia systemu w czasie $t_k = 24$ h.

Zadanie 4.5

Wśród 1000 jednakowych uszczelek zapasowych trzymany w pojemniku 3% jest wadliwych. Wśród pobranych z pojemnika 50 uszczelek znalazło się 6 wadliwych. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że losowo pobrana z pojemnika kolejna uszczelka jest wadliwa.

Zadanie 4.6

Prawdopodobieństwo przekroczenia w ciągu 1 roku poziomu alarmowego przez rzekę w pewnej gminie wynosi 0,1, a prawdopodobieństwo przzerwania wałów przeciwpowodziowych w tej sytuacji wynosi 0,15. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 1 roku nie dojdzie do przzerwania wałów przeciwpowodziowych w gminie.

Zadanie 4.7

W wyniku identyfikacji zagrożeń na stanowisku pracy uznano, że podczas wykonywania przez pracownika zadania może on zostać potrącony przez przejeżdżający wózek elektryczny. Metodą ekspercką (podrozdz. 5.4) oszacowano prawdopodobieństwo zajścia tego zdarzenia w ciągu 1 roku. Wynosi ono 0,015. Także w sposób ekspercki oszacowano prawdopodobieństwo doznania przez pracownika co najmniej ciężkich obrażeń ciała jako skutku zdarzenia. Wynosi ono 0,1. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo utraty zdrowia przez pracownika w stopniu co najmniej ciężkim w ciągu 1 roku w związku z potrąceniem go przez wózek.

Zadanie 4.8

Podczas dokonywania przez pracownika przeglądu instalacji paliwowej samolotu może dojść do dwóch zdarzeń niepożądanych:

$\mathcal{A}^{(1)}$ – upadku pracownika z wysokości 4 m,

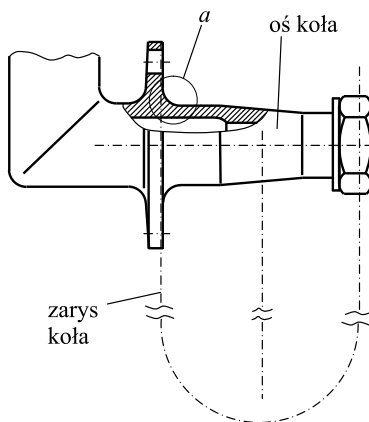
$\mathcal{A}^{(2)}$ – potrącenia przez przejeżdżający wózek.

Prawdopodobieństwa zajścia każdego z nich podczas 1 roku, oszacowane metodą ekspercką (podrozdz. 5.4), wynoszą: $Q^{(1)} = 0,5 \cdot 10^{-6}$, $Q^{(2)} = 0,1 \cdot 10^{-6}$. Zespół ekspertów oszacował również, że zdarzenia te mogą spowodować co najmniej ciężkie obrażenia pracownika z prawdopodobieństwami odpowiednio 0,20 i 0,08. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo doznania przez pracownika w ciągu roku pracy co najmniej ciężkich obrażeń, związane z dokonywanymi przeglądami.

Zadanie 4.9

W fazie lądowania samolotu zdarza się czasami tak zwane twarde lądowanie. Prawdopodobieństwo wystąpienia takiego zdarzenia (zdarzenia \mathcal{A}) dla każdego lotu wynosi $P\{\mathcal{A}\} = 0,001$. Naprężenia maksymalne σ we fragmencie a osi koła podwozia (rys. 4.5) mogą wówczas przekroczyć granicę R_m wytrzymałości doraźnej materiału osi, co oznacza jej zniszczenie.

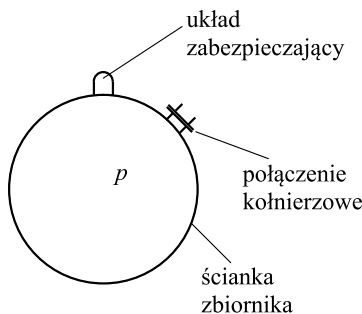
Na podstawie odpowiednich pomiarów stwierdzono, że naprężenia σ mają duże rozrzuty losowe (w kolejnych tego typu lądowaniach), a ich rozkład prawdopodobieństwa jest normalny z parametrami: wartość oczekiwana $E\sigma = 950$ MPa, wariancja $V\sigma = 95^2$ (MPa)². Granica R_m wytrzymałości materiału osi ma także rozkład normalny o parametrach: $ER_m = 1715$ MPa, $VR_m = 170^2$ (MPa)². Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo r niezniszczenia osi podwozia przy jednym lądowaniu.



Rys. 4.5. Oś koła podwozia samolotu

Zadanie 4.10

Do wypływu chloru z analizowanego fragmentu instalacji chemicznej, przedstawionego na rysunku 4.6, może dojść wskutek pęknięcia zbiornika (zdarzenia **A**) albo utraty szczelności w połączeniu kołnierзовym (zdarzenia **B**). Pęknięcie zbiornika jest możliwe, gdy ciśnienie w nim wzrośnie ponad wartość krytyczną dla ścianki zbiornika (zdarzenie **C**) i nie zadziała układ zabezpieczający (zdarzenie **D**).



Rys. 4.6. Analizowany fragment instalacji chemicznej

Prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia **B** i zdarzenia **C** w ciągu 1 roku wynoszą odpowiednio $Q_B \equiv q_B = 0,5 \cdot 10^{-4}$ i $Q_C \equiv q_C = 2 \cdot 10^{-4}$. Układ zabezpieczający funkcjonuje tylko wtedy, gdy dochodzi do zdarzenia **C**. Niezadziałanie tego układu w takiej sytuacji zachodzi z prawdopodobieństwem $P\{D | C\} \equiv q_{D|C} = 0,08$. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo wypływu chloru w ciągu 1 roku funkcjonowania instalacji chemicznej.

Zadanie 4.11

W chwili wezwania do chorego w stacji pogotowia ratunkowego znajdują się 2 karetki i 2 kierowców. Prawdopodobieństwo niepodjęcia zadania przez kierowcę wynosi $P\{A\} = 0,05$, a prawdopodobieństwo przebywania karetki w tym czasie w fazie naprawy wynosi $P\{B\} = 0,02$. Prawdopodobieństwo wystąpienia w okresie przejazdu do chorego zdarzenia, uniemożliwiającego kontynuowanie jazdy, wynosi $q = 5 \cdot 10^{-3}$. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na niedotarciu karetki do chorego po przyjęciu zgłoszenia.

Zadanie 4.12

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na niedotarciu karetki pogotowia ratunkowego do chorego po przyjęciu zgłoszenia $Q = 79 \cdot 10^{-4}$, a prawdopodobieństwo zgonu chorego na skutek takiego zdarzenia $Z = 0,20$. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo utraty życia przez chorego w tej sytuacji.

Zadanie 4.13

Przy podchodzeniu do lądowania nie zadziałał w samolocie podstawowy układ wypuszczania podwozia (zdarzenie A). Prawdopodobieństwo niezadziałania awaryjnego układu wypuszczania podwozia (zdarzenia A_1) wynosi 0,01. W przypadku niezadziałania tego układu rodzaj i wielkość strat zależą od jakości lądowania bez podwozia. Prawdopodobieństwo popełnienia błędu przez pilota (zdarzenia A_2) w tej sytuacji wynosi 0,10. Prawdopodobieństwo powstania strat ludzkich w przypadku popełnienia błędu przez pilota $q_l = 0,80$, a w przypadku poprawnego jego działania $p_l = 0,15$. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo powstania strat ludzkich w opisanej sytuacji (niezadziałania podstawowego układu wypuszczania podwozia).

Zadanie 4.14

Jednym ze zdarzeń, które stwarzają duże zagrożenie w locie szybowca, jest zablokowanie steru wysokości. W celu ratowania życia w tej sytuacji pilot opuszczaabinę, a następnie otwiera spadochron. Prawdopodobieństwo tego, że próba opuszczenia kabiny będzie nieudana (zdarzenie a) wynosi $q_a = 0,20$, a prawdopodobieństwo tego, że próba otwarcia spadochronu będzie nieudana (zdarzenie b) wynosi $q_b = 0,002$. Prawdopodobieństwo utraty życia przez pilota: w przypadku zajścia zdarzenia a wynosi $Z_1 = 1$, w przypadku sekwencji zdarzeń $\bar{a}, b \rightarrow Z_2 = 0,90$, natomiast w przypadku, gdy po \bar{a} następuje zdarzenie \bar{b} , wynosi ono $Z_3 = 0$. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo utraty życia przez pilota wskutek zablokowania steru wysokości.

Zadanie 4.15

Podczas modelowania ryzyka indywidualnego, związanego z jednym startem szybowca za wyciągarką, zespół ekspertów wyróżnił dwa pierwotne zdarzenia niepożądane, uznając je za istotne ze względu na poziom ryzyka dla pilota. Są to: zerwanie liny wyciągarkowej oraz zaczepienie skrzydłem podczas rozbiegu. Pierwsze z nich może zajść w czasie jednego startu z prawdopodobieństwem $0,8 \cdot 10^{-5}$, a drugie – z prawdopodobieństwem $5 \cdot 10^{-5}$. Eksperti oszacowali także, że zdarzenia te mogą spowodować utratę przez niego życia z prawdopodobieństwami równymi odpowiednio 0,65 i 0,10. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo utraty życia przez pilota, związane z 1 startem szybowca.

Zadanie 4.16

Niepoprawne podejście do lądowania samolotu może być spowodowane uszkodzeniem w układzie sterowania albo niepoprawnym (niezgodnym z procedurami) działaniem pilota podczas lądowania. Prawdopodobieństwa zajścia tych zdarzeń w jednym lądowaniu wynoszą odpowiednio $q_1 = 2 \cdot 10^{-5}$ i $q_2 = 5 \cdot 10^{-4}$. Prawdopodobieństwo utraty życia przez co najmniej jedną osobę, spowodowane niepoprawnym lądowaniem w tej sytuacji, wynosi $Z = 0,10$. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo utraty życia przez co najmniej jedną osobę, związane z niepoprawnym podejściem do lądowania.

Zadanie 4.17

W wyniku identyfikacji zagrożeń na stanowisku pracy uznano, że podczas wykonywania przez pracownika zadania a mogą wystąpić dwa zdarzenia:

A_1 – włożenie ręki przez pracownika w strefę poruszających się elementów maszyny,

A_2 – oderwanie się fragmentu wirującego elementu,

a podczas wykonywania zadania b – jedno zdarzenie

A_3 – potrącenie pracownika przez przejeżdżający wózek elektryczny.

Metodami eksperckimi oszacowano prawdopodobieństwa zajścia tych zdarzeń w ciągu 1 roku. Wynoszą one odpowiednio: 0,005; 0,001; 0,015. Także w sposób ekspercki oszacowane zostały prawdopodobieństwa doznania przez pracownika co najmniej ciężkich obrażeń ciała jako skutku każdego z tych zdarzeń. Wynoszą one odpowiednio: 0,004; 0,005; 0,001. Należy wskazać, które z wyróżnionych dwóch zadań jest bardziej niebezpieczne dla pracownika.

Zadanie 4.18

Układ napędu awionetki składa się z dwóch jednakowych silników. Prawdopodobieństwo wystąpienia awarii każdego z nich, oszacowane dla jednego (średniego) przelotu, wynosi $q = 2 \cdot 10^{-4}$. W czasie $t = 1$ rok takich przelotów pilot wykonuje $m = 200$. Prawdopodobieństwo utraty życia przez pilota w przypadku uszkodzenia w locie jednego z silników wynosi $Z_1 = 0,06$, a w przypadku uszkodzenia obydwa jest ono równe $Z_2 = 0,90$. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo utraty życia przez pilota awionetki w ciągu 1 roku wykonywania lotów, związane z awariami układu napędu.

Uwaga: założyć, że uszkodzenie jednego silnika nie wpływa na niezawodność drugiego silnika.

Zadanie 4.19

Pracownik podczas współpracy z robotem może popełnić błąd (zdarzenie niepożądane A), w wyniku którego pojawia się stan zagrożenia dla zdrowia i życia pracownika. Eksperti oszacowali, że prawdopodobieństwo zajścia takiego zdarzenia w ciągu 1 roku pracy wynosi $Q = 0,08$. W celu zmniejszenia ryzyka utraty zdrowia przez pracownika w takiej sytuacji stanowisko jego pracy zostało wyposażone w układ przeciwdziałania zagrożeniu składający się z dwóch zespołów. Zespół 2 włącza się do działania tylko wtedy, gdy nie zadziała zespół 1. Prawdopodobieństwo niezadziałania zespołu 1 (zdarzenia niepożądanego A_1) w sytuacji zagrożenia, tzn. w chwili popełnienia błędu przez pracownika, $q_1 = 2 \cdot 10^{-4}$, a prawdopodobieństwo niezadziałania zespołu 2 (zdarzenia A_2), gdy nie zadziała zespół 1, wynosi $q_2 = 8 \cdot 10^{-4}$. Prawdopodobieństwo utraty życia przez pracownika (zdarzenia B) w sytuacji zagrożenia (w wyniku zajścia zdarzenia A), pod warunkiem, że nie zadziałał zespół 1, wynosi $Z_1 = P\{B|A \cap A_1\} = 0,2$. Prawdopodobieństwo takie w sytuacji niezadziałania również zespołu 2 wzrasta do $Z_2 = P\{B|A \cap A_1 \cap A_2\} = 0,9$. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo utraty życia przez pracownika podczas współpracy z robotem w ciągu 1 roku.


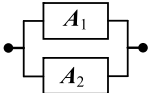
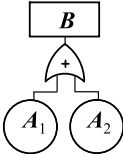
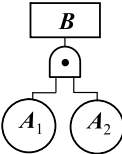
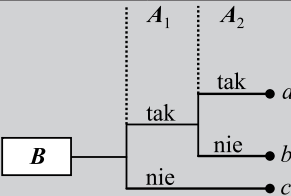
4.3. METODY GRAFICZNE W PROBABILISTYCZNYM OPISIE DZIAŁAŃ NA ZDARZENIACH

Wyznaczanie i analiza prawdopodobieństw zdarzeń losowych, które są rezultatem działań na innych zdarzeniach, może być skomplikowane, gdy tych innych zdarzeń jest więcej niż kilka. W praktyce inżynierskiej jest to sytuacja występująca

dość często. W celu ułatwienia odwzorowywania takich sytuacji i ich matematycznych analiz zostały opracowane metody ułatwiające te działania w praktyce. Są one opisywane zwłaszcza w literaturze dotyczącej zagadnień niezawodności i bezpieczeństwa, a ich podstawą jest graficzne obrazowanie działań na zdarzeniach. Przede wszystkim należy wymienić dwie metody, mianowicie: metodę schematów blokowych oraz metodę drzew. W obu działania na zdarzeniach, głównie suma logiczna i iloczyn logiczny, są przedstawiane w sposób umowny i w różnych formach graficznych. W niniejszym podrozdziale metody te są przedstawione jedynie w dużym skrócie, obszerne ich opisy są dostępne w odpowiedniej literaturze.

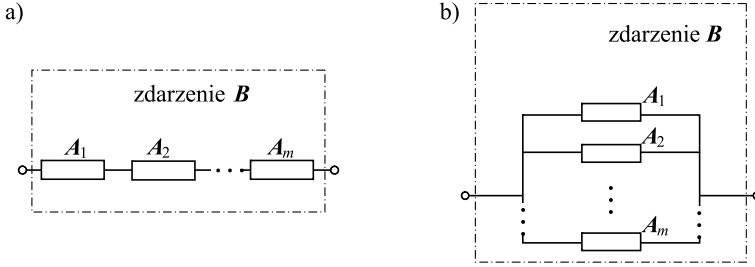
Związki tych metod z algebrą zdarzeń są przedstawione w sposób poglądowy w tabeli 4.1.

Tabela 4.1. Związki metod graficznych z algebrą zdarzeń

Zapis symboliczny	Metoda graficzna	Działanie na zdarzeniach	
		suma logiczna	iloczyn logiczny
		$B = A_1 \cup A_2$	$B = A_1 \cap A_2$
Metody graficzne	schematów blokowych		
	drzew		
			
$P\{B\}$		$P\{B\} = \sum_{i=a}^c P\{i\} P\{B i\}$	
		$P\{B\} = P\{A_1 \cup A_2\}$	$P\{B\} = P\{A_1 \cap A_2\}$

METODA SCHEMATÓW BLOKOWYCH

W tej metodzie wyróżnia się głównie dwa układy zdarzeń: szeregowy, który jest odpowiednikiem sumy logicznej, i równoległy, który jest odpowiednikiem iloczynu logicznego (rys. 4.7).



Rys. 4.7. Układy zdarzeń w metodzie schematów blokowych: a) układ szeregowy, b) układ równoległy

Z układem szeregowym mamy do czynienia wtedy, gdy zajście co najmniej jednego dowolnego zdarzenia A_i spośród wyróżnionych w układzie oznacza zajście zdarzenia B . Na podstawie wyrażenia (4.4) można wówczas napisać, że

$$\begin{aligned} P\{B\} &= P\{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} + P\{A_3\} + \dots \\ &\quad - P\{A_1 \cap A_2\} - P\{A_1 \cap A_3\} - P\{A_2 \cap A_3\} - \dots \\ &\quad + P\{A_1 \cap A_2 \cap A_3\} + \dots \end{aligned} \quad (4.24)$$

Jeśli zdarzenia A_i są rozłączne, to wyrażenie to upraszcza się do postaci

$$P\{B\} = P\{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} + P\{A_3\} + \dots \quad (4.25)$$

Z układem równoległym mamy do czynienia wtedy, gdy do zajścia zdarzenia B konieczne jest zajście wszystkich zdarzeń A_i wyróżnionych w układzie. Z postaci wyrażenia (4.8) wynika wówczas, że

$$P\{B\} = P\{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots\} = P\{A_3 | A_1 \cap A_2\} P\{A_2 | A_1\} P\{A_1\}. \quad (4.26)$$

Jeśli zdarzenia A_i są niezależne, to wyrażenie to upraszcza się do postaci

$$P\{B\} = P\{A_1\} P\{A_2\} P\{A_3\}. \quad (4.27)$$

W praktyce wyznaczania prawdopodobieństwa $P\{B\}$ w odniesieniu do układów szeregowych wygodniejsze jest operowanie relacjami

$$P\{B\} = 1 - P\{\bar{B}\},$$

gdzie

$$P\{\bar{B}\} = P\{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots\}, \quad (4.28)$$

przy czym prawa strona wyrażenia (4.28) jest wyznaczana przy użyciu wzoru (4.26) lub (4.27).

Uwaga: Obliczenia oparte na schematach blokowych są stosowane między innymi w analizach niezawodności. Obecnie jest dostępne specjalistyczne oprogramowanie, które automatyzuje te obliczenia. Zadaniem inżyniera niezawodności jest dekompozycja struktury niezawodnościowej systemu i przedstawienie jej w postaci schematu blokowego oraz określenie niezawodności poszczególnych elementów systemu, uwzględnionych w schemacie.

PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 4.13

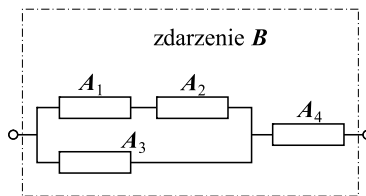
Pewne urządzenie jest złożone z czterech zespołów. W rezultacie modelowania jego niezawodności w każdym z zespołów wyróżniono po jednym zdarzeniu, uznanym za uszkodzenie zespołu. Są to zdarzenia odpowiednio: A_1 , A_2 , A_3 i A_4 . Ekspertzy stwierdzili, że do uszkodzenia urządzenia (zdarzenia B) może dojść, jeśli uszkodzi się: zespół 4 (tzn. pojawi się zdarzenie A_4) lub pozostała część urządzenia, czyli zespół 3 i co najmniej jeden z zespołów 1 i 2.

W pierwotnej wersji wszystkie zespoły urządzenia mają wartości funkcji niezawodności, czyli prawdopodobieństwa nieuszkodzenia określone dla przewidywanego czasu t funkcjonowania urządzenia, jednakowe i równe $R_i(t) \equiv R_i = 0,95$. Należy:

- 1) przedstawić w postaci schematu blokowego zależność uszkodzenia urządzenia od uszkodzeń jego zespołów,
- 2) przeanalizować, poprawa niezawodności którego z zespołów 1 i 4 skuteczniej wpływa na niezawodność urządzenia.

Rozwiązanie

Ad 1) Z treści przykładu wynika, że uszkodzenie zespołu 4 (zdarzenie A_4) i uszkodzenie pozostałej części urządzenia, złożonej z zespołów 1, 2 i 3 (zdarzenie A_{123}), tworzą szeregowy układ zdarzeń, czyli sumę logiczną zdarzeń A_4 i A_{123} . Zdarzenie A_{123} , opisane w treści przykładu, może wystąpić, jeśli pojawi się zdarzenie A_3 i co najmniej jedno ze zdarzeń A_1 oraz A_2 . Zatem zależność zdarzenia B , czyli uszkodzenia urządzenia, od uszkodzeń jego zespołów można odwzorować w postaci schematu blokowego, pokazanego na rysunku 4.8.



Rys. 4.8. Zależność uszkodzenia urządzenia od uszkodzeń jego zespołów

Ad 2) Przyjmijmy, że miarą niezawodności urządzenia jest funkcja niezawodności R , definiowana jako prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do B , czyli

$$R = P\{\bar{B}\} = 1 - P\{B\}. \quad (4.29)$$

Schemat blokowy (rys. 4.8) ułatwia sformułowanie zależności prawdopodobieństwa zdarzenia B od prawdopodobieństw zdarzeń A_1, A_2, A_3 i A_4 . Załóżmy, że zdarzenia A_i są niezależne. Zgodnie z regułami podanymi w tabeli 4.1 prawdopodobieństwo zdarzenia B wynosi

$$P\{B\} = P\{A_4 \cup A_{123}\} = P\{A_4\} + P\{A_{123}\} - P\{A_4 \cap A_{123}\}. \quad (4.30)$$

Z założonej niezależności zdarzeń wynika, że

$$P\{A_4 \cap A_{123}\} = P\{A_4\}P(A_{123}). \quad (4.31)$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A_{123} wynosi (rys. 4.8)

$$\begin{aligned} P\{A_{123}\} &= P\{A_3 \cap (A_1 \cup A_2)\} = P\{A_3\}[P\{A_1\} + P\{A_2\} - P\{A_1\}P\{A_2\}] = \\ &= Q_3[Q_1 + Q_2 - Q_1Q_2]. \end{aligned}$$

Zatem wzór (4.31) przybiera postać

$$P\{A_4 \cap A_{123}\} = Q_4Q_3[Q_1 + Q_2 - Q_1Q_2],$$

a wyrażenie (4.30)

$$\begin{aligned} P\{B\} &= Q_4 + Q_3[Q_1 + Q_2 - Q_1Q_2] - Q_4Q_3[Q_1 + Q_2 - Q_1Q_2] = \\ &= Q_4 + Q_3[Q_1 + Q_2 - Q_1Q_2](1 - Q_4). \end{aligned} \quad (4.32)$$

W rezultacie podstawienia tego wyniku i relacji $Q_i = 1 - R_i$ do wzoru (4.29) otrzymujemy po przekształceniach

$$R = R_4[1 - (1 - R_3)(1 - R_1R_2)]. \quad (4.33)$$

W celu przeanalizowania wpływu poprawy niezawodności zespołów 1 i 4 na niezawodność całego urządzenia przekształcamy to wyrażenie w dwie oddzielne zależności funkcji niezawodności R od: tylko wielkości R_1 i tylko od wielkości R_4 . Po podstawieniu do wyrażenia (4.33) wartości $R_2 = R_3 = R_4 = 0,95$ otrzymujemy pierwszą z nich

$$R = 0,9025 + 0,0451R_1, \quad (4.34)$$

a w rezultacie podstawienia wartości $R_1 = R_2 = R_3 = 0,95$ uzyskujemy drugą

$$R = 0,9951R_4. \quad (4.35)$$

Z postaci wyrażeń (4.34) i (4.35) wynika, że wpływ poprawy niezawodności zespołu 4 na niezawodność urządzenia jest znacznie silniejszy niż w przypadku zespołu 1. Tak na przykład zwiększenie wielkości R_1 od wartości 0,95 do 0,97, zgodnie ze wzorem (4.34), daje wynik

$$R = 0,9025 + 0,0451 \cdot 0,97 = 0,9462,$$

a w rezultacie podobnej poprawy niezawodności zespołu 4 otrzymujemy

$$R = 0,9951 \cdot 0,97 = 0,9652.$$

PRZYKŁAD 4.14

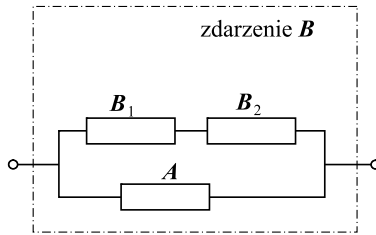
Działanie systemu obrony przeciwrakietowej opisane w przykładzie 4.11 należy przedstawić w formie schematu blokowego i, opierając się na nim, wyznaczyć prawdopodobieństwo strącenia rakiety. Do obliczeń przyjąć dane z przykładu 4.11: $r_w = 0,95$, $r_{s1} = 0,97$, $r_{s2} = 0,85$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez:

- A – wykrycie wyrzuczonej rakiety,
- B_1 – zdarzenie polegające na trafieniu w wykrytą rakietę przez wyrzutnię 1,
- B_2 – zdarzenie polegające na trafieniu w wykrytą rakietę przez wyrzutnię 2,
- B – strącenie rakiety.

Z opisu działania systemu obrony przeciwrakietowej, przedstawionego w treści przykładu 4.11, wynika, że do strącenia rakiety (zdarzenia B) dochodzi, jeśli rakietka zostanie wykryta (zdarzenie A) i zostanie trafiona albo przez wyrzutnię 1 albo przez wyrzutnię 2. Takie działanie można więc przedstawić w graficznej formie schematu blokowego, jak na rysunku 4.9.



Rys. 4.9. Schemat blokowy działań systemu obrony przeciwrakietowej prowadzących do strącenia rakiety

Ze schematu tego wynika, iż prawdopodobieństwo zdarzenia B wynosi

$$P\{B\} = P\{A \cap (B_1 \cup B_2)\} = P\{A\}P\{B_1 \cup B_2\}. \quad (4.36)$$

Prawdopodobieństwo wykrycia rakiety $P\{A\} = r_w$. Zdarzenia B_1 i B_2 są zdarzeniami rozłącznymi, więc

$$P\{B_1 \cup B_2\} = P\{B_1\} + P\{B_2\}. \quad (4.37)$$

W wyrażeniu tym $P\{B_1\} = r_{s1}$. W rozważanym przykładzie zdarzenie B_2 zachodzi tylko łącznie ze zdarzeniem \bar{B}_1 , zatem

$$P\{B_2\} = P\{B_2 \cap \bar{B}_1\} = P\{\bar{B}_1\}P\{B_2 | \bar{B}_1\} = (1 - r_{s1})r_{s2}.$$

Stąd

$$P\{\mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2\} = r_{s1} + (1 - r_{s1})r_{s2}.$$

Wszystkie wielkości występujące w wyrażeniu (4.36) są więc już znane i możemy nadać mu postać

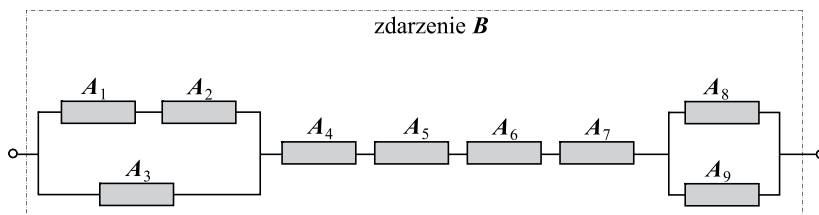
$$P\{\mathbf{B}\} = r_w[r_{s1} + (1 - r_{s1})r_{s2}].$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy

$$P\{\mathbf{B}\} = 0,95[0,97 + (1 - 0,97) \cdot 0,85] = 0,946.$$

PRZYKŁAD 4.15

W rezultacie modelowania niezawodności pewnego systemu zdarzenie \mathbf{B} polegające na uszkodzeniu systemu w określonym czasie zobrazowano za pomocą schematu blokowego przedstawionego na rysunku 4.10.



Rys. 4.10. Zależność uszkodzenia analizowanego systemu od wyróżnionych w nim uszkodzeń (uszkodzeń jego elementów)

Wyróżnione w nim zdarzenia A_i , gdzie $i = 1, 2, \dots, 9$, są uszkodzeniami elementów systemu. Są one niezależne. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo R nieuszkodzenia systemu w czasie t przy założeniu, że znane są prawdopodobieństwa q_i uszkodzenia elementów systemu w tym czasie.

Rozwiązanie

Celem przykładu jest wyznaczenie prawdopodobieństwa

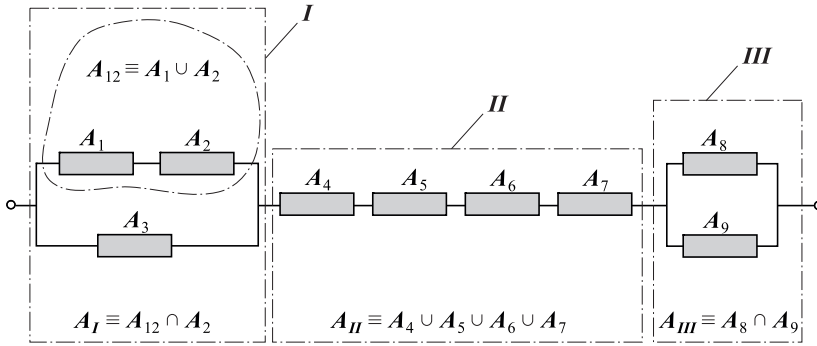
$$R = P\{\bar{\mathbf{B}}\}. \quad (4.38)$$

Zauważmy, że w przedstawionym schemacie blokowym można wyróżnić grupy I, II i III elementów systemu (rys. 4.11), a uszkodzenia każdej grupy, czyli zdarzenia A_I , A_{II} i A_{III} , tworzą szeregowy układ zdarzeń. Oznacza to, że

$$P\{\bar{\mathbf{B}}\} = P\{\bar{A}_I \cap \bar{A}_{II} \cap \bar{A}_{III}\}. \quad (4.39)$$

Ponieważ zdarzenia A_i są niezależne, więc również zdarzenia \bar{A}_I , \bar{A}_{II} i \bar{A}_{III} są niezależne. Stąd, opierając się na wzorze (4.27), wyrażeniu (4.39) nadajemy postać

$$P\{\bar{B}\} = P\{\bar{A}_I\}P\{\bar{A}_{II}\}P\{\bar{A}_{III}\}. \quad (4.40)$$



Rys. 4.11. Szeregowy układ grup zdarzeń

Wyznamy kolejno prawdopodobieństwa występujące po prawej stronie tego wyrażenia. Wykorzystamy do tego działania na zdarzeniach wynikające ze schematu blokowego (rys. 4.11) i zamieszczone na jego tle.

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia \bar{A}_I wynosi

$$P\{\bar{A}_I\} = 1 - P\{A_I\},$$

przy czym

$$\begin{aligned} P\{A_I\} &= P\{A_{12} \cap A_3\} = P\{(A_1 \cup A_2) \cap A_3\} = P\{A_1 \cup A_2\}P\{A_3\} = \\ &= (P\{A_1\} + P\{A_2\} - P\{A_1\}P\{A_2\})P\{A_3\} = (q_1 + q_2 - q_1q_2)q_3. \end{aligned}$$

Stąd

$$P\{\bar{A}_I\} = 1 - (q_1 + q_2 - q_1q_2)q_3. \quad (4.41)$$

Zdarzenie A_{II} jest zbiorem zdarzeń A_4, A_5, A_6 i A_7 tworzących układ szeregowy (czyli jest sumą tych zdarzeń). Korzystając z relacji (4.27), znajdujemy prawdopodobieństwo

$$P\{\bar{A}_{II}\} = P\{\bar{A}_4\}P\{\bar{A}_5\}P\{\bar{A}_6\}P\{\bar{A}_7\} = (1 - q_4)(1 - q_5)(1 - q_6)(1 - q_7). \quad (4.42)$$

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia \bar{A}_{III} wynosi

$$P\{\bar{A}_{III}\} = 1 - P\{A_{III}\},$$

przy czym

$$P\{A_{III}\} = P\{A_8 \cap A_9\} = P\{A_8\}P\{A_9\} = q_8q_9.$$

Zatem

$$P\{\bar{A}_{III}\} = 1 - q_8q_9. \quad (4.43)$$

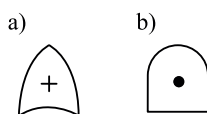
Uzyskane wyniki w postaci wzorów (4.41)–(4.43) podstawiamy do wyrażenia (4.40) i na mocy relacji (4.38) otrzymujemy

$$R = [1 - (q_1 + q_2 - q_1q_2)q_3](1 - q_4)(1 - q_5)(1 - q_6)(1 - q_7)(1 - q_8q_9).$$

Jest to poszukiwane prawdopodobieństwo nieuszkodzenia analizowanego systemu (w czasie t).

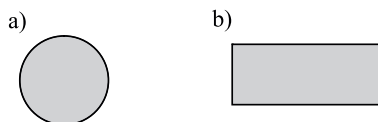
METODA DRZEW

Metody drzew są w literaturze prezentowane w różnych formach graficznych, ale pod względem merytorycznym różnice te są niewielkie. Najczęściej przedstawianą i stosowaną w praktyce (zwłaszcza w analizach ryzyka) jest metoda, w ramach której przy konstruowaniu drzewa obrazującego związki między zdarzeniami i działania na nich stosuje się umowne symbole sumy logicznej i iloczynu logicznego zdarzeń, pokazane na rysunku 4.12.

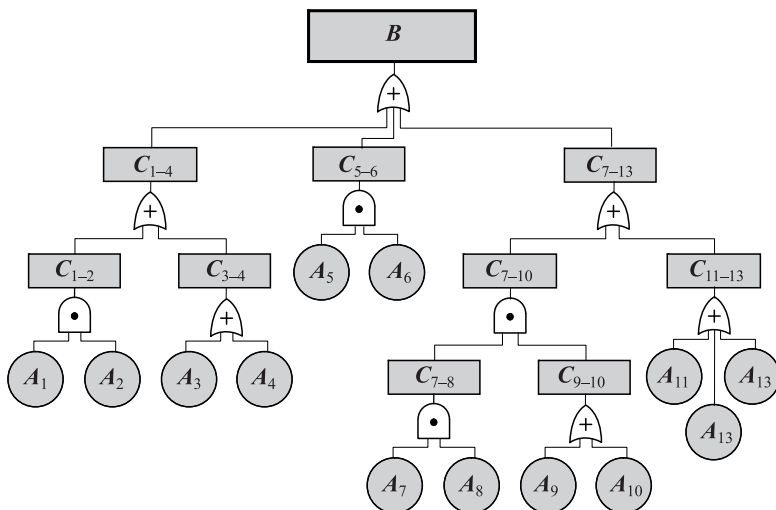


Rys. 4.12. Symbole operacji logicznych na zdarzeniach: a) sumy logicznej („lub”), b) iloczynu logicznego („i”)

Prócz graficznych symboli operacji logicznych w metodzie tej stosuje się także inne znaki graficzne, głównie symbole zdarzeń. Dwa z nich są przedstawione na rysunku 4.13. Ich rola jest uwidoczniiona na rysunku 4.14, przedstawiającym przykład drzewa zdarzeń w tej metodzie.



Rys. 4.13. Ważniejsze symbole graficzne zdarzeń: a) zdarzenie podstawowe, b) zdarzenie będące rezultatem operacji logicznej



Rys. 4.14. Przykład drzewa zdarzeń

Metoda oparta na takich drzewach jest stosowana głównie w praktyce inżynierskich analiz ryzyka i analiz niezawodności. Jest w nich wykorzystywana do wyznaczania prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia B jako funkcji prawdopodobieństw zdarzeń podstawowych A_i . W modelach ryzyka i niezawodności zdarzeniami wyróżnianymi w drzewie są zdarzenia niepożądane, tzn. stwarzające możliwość pojawienia się strat (np. ludzkich lub finansowych). Z tego powodu metoda jest nazywana metodą drzewa niesprawności (lub metodą drzewa uszkodzeń). Tworzenie drzewa rozpoczyna się od identyfikowania w analizowanym systemie zdarzeń będących bezpośrednimi przyczynami zdarzenia B (nazywanego zdarzeniem szczytowym) i ustaleniu ich wpływu na możliwość wystąpienia tego zdarzenia. Takimi zdarzeniami w drzewie pokazanym na rysunku 4.14 są: C_{1-4} , C_{5-6} i C_{7-13} . Proces identyfikowania przyczyn zdarzeń (niepożądanych) jest prowadzony na kolejnych poziomach zbioru przyczyn i kończy się na zdarzeniach podstawowych.

Opis matematyczny działań na zdarzeniach, tj. sumy logicznej i iloczynu logicznego, przedstawianych za pomocą symboli pokazanych na rysunku 4.12 jest charakterystyczny dla tych działań i identyczny, jak w przypadku metody schematów blokowych. Jest on ujęty relacjami (4.24)–(4.27).

Uwaga: Warto podkreślić, że podobnie, jak w przypadku obliczeń prowadzonych przy użyciu metody graficznej schematów blokowych, również w przypadku obliczeń opartych na metodzie drzew jest dostępne specjalistyczne oprogramowanie, które automatyzuje obliczenia. Zadaniem inżyniera jest dekompozycja systemu i przedstawienie go w postaci odpowiedniego drzewa oraz określenie prawdopodobieństw wystąpienia zdarzeń podstawowych, uwzględnionych w drzewie.

W analizach ryzyka i niezawodności prawdopodobieństwa zdarzeń niepożądanych, w szczególności zdarzeń podstawowych, są zwykle na tyle małe, że w opisie matematycznym sumy zdarzeń pomija się (choć nie jest to regułą) człony zawierające prawdopodobieństwa iloczynów zdarzeń jako małe w porównaniu do członów określających prawdopodobieństwa zdarzeń. Przyjmuje się zatem, że

$$P\{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots\} \approx P\{A_1\} + P\{A_2\} + P\{A_3\} + \dots \quad (4.44)$$

Zwykle też w tych analizach zakłada się niezależność zdarzeń, czego konsekwencją jest relacja

$$P\{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots\} = P\{A_1\}P\{A_2\}P\{A_3\}\dots \quad (4.45)$$

Takie założenia upraszczające ułatwiają wyznaczanie prawdopodobieństwa zdarzenia szczytowego, czyli zdarzenia **B**.

Jeśli znane są prawdopodobieństwa q_i wystąpienia zdarzeń podstawowych A_i oraz struktura drzewa, to przy wspomnianych założeniach upraszczających względnie łatwo można wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia **B**. Tak na przykład, gdyby drzewo miało postać taką, jak przedstawiona na rysunku 4.14, to

$$P\{B\} = P\{C_{1-4}\} + P\{C_{5-6}\} + P\{C_{7-13}\},$$

gdzie:

$$P\{C_{1-4}\} = q_1q_2 + q_3 + q_4,$$

$$P\{C_{5-6}\} = q_5q_6,$$

$$P\{C_{7-13}\} = q_7q_8(q_9 + q_{10}) + q_{11} + q_{12} + q_{13},$$

i w rezultacie

$$P\{B\} = q_1q_2 + q_3 + q_4 + q_5q_6 + q_7q_8(q_9 + q_{10}) + q_{11} + q_{12} + q_{13}.$$

Inna postać drzewa jest tworzona w sytuacji, gdy poszukiwane jest prawdopodobieństwo zdarzenia **B**, które może zająć z jednym z rozłącznych zdarzeń **a**, **b**, **c**, ... W analizach ryzyka zdarzenia **a**, **b**, **c**, ... są na ogół zbiorami zdarzeń uporządkowanymi w scenariusze przebiegu zdarzeń, według których dochodzi do określonych negatywnych konsekwencji (zdarzenia **B**), np. strat ludzkich. Przykład jednej z postaci takiego drzewa scenariuszy przebiegu zdarzeń jest przedstawiony na rysunku 4.15. Symbole $q_{j|i} = P\{A_j | A_i\}$ oznaczają prawdopodobieństwa warunkowe – zajścia zdarzenia A_j pod warunkiem wcześniejszego zajścia zdarzenia A_i (podrozdz. 4.2).

Zdarzenie **B** w tym drzewie oznacza zajście określonych konsekwencji jako skutku innego zdarzenia, np. wybuchu pożaru w magazynie. W zależności od celu analizy może to być na przykład utrata życia przez człowieka, określone szkody finansowe i in. W drzewie tym wyróżniono 5 scenariuszy (**a–e**) przebiegu zdarzeń, według których mogły te konsekwencje zaistnieć. Każdemu ze scenariuszy

jest przypisany rozmiar konsekwencji, np. w formie

$$Z_i = P\{\mathbf{B}|\mathbf{i}\}, \quad (4.46)$$

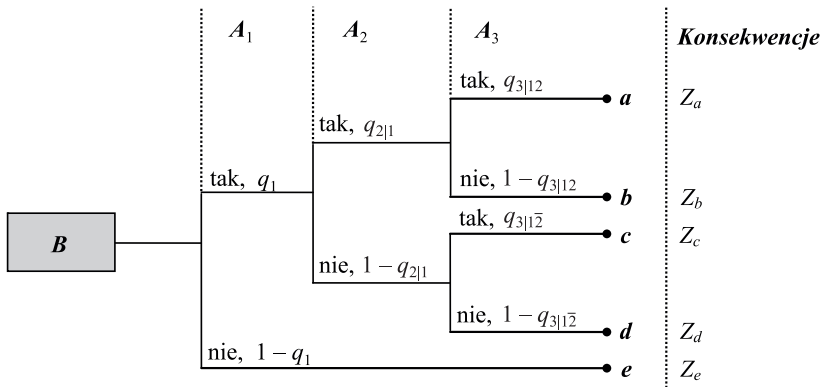
gdzie $\mathbf{i} = \mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$ jest określonym scenariuszem. Zgodnie ze wzorem (4.11) na prawdopodobieństwo zupełne, prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia \mathbf{B} w przedstawionym przykładzie wynosi

$$P\{\mathbf{B}\} = \sum_{i=\mathbf{a}}^e P\{\mathbf{i}\} P\{\mathbf{B}|\mathbf{i}\} = \sum_{i=\mathbf{a}}^e P\{\mathbf{i}\} Z_i. \quad (4.47)$$

Każdy ze scenariuszy jest iloczynem zdarzeń wyróżnionych w drzewie. Zatem prawdopodobieństwo przebiegu zdarzeń zgodnie na przykład ze scenariuszem $\mathbf{i} = \mathbf{c}$ wynosi

$$P\{\mathbf{i} = \mathbf{c}\} = P\{A_1\} P\{\bar{A}_2 | A_1\} P\{A_3 | A_1 \cap \bar{A}_2\} = q_1 (1 - q_{2|1}) q_{3|1\bar{2}}. \quad (4.48)$$

W odróżnieniu od metody opartej na drzewach typu prezentowanego na rysunku 4.14 metoda graficzna, w której wykorzystuje się drzewa scenariuszy przebiegu zdarzeń (o postaci, jak na rysunku 4.15), umożliwia odwzorowywanie chronologii w przebiegu zdarzeń, np. w tworzonym modelu ryzyka.



Rys. 4.15. Przykład drzewa w sytuacji, gdy analizowane zdarzenie (zdarzenie \mathbf{B}) może zajść według różnych scenariuszy

PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 4.16

Działanie systemu obrony przeciwrakietowej opisane w przykładzie 4.11 należy przedstawić w formie odpowiedniego drzewa scenariuszy zdarzeń i, opierając się na nim, wyznaczyć prawdopodobieństwo strącenia rakiety. Do obliczeń

przyjąć dane z przykładu 4.11: $r_w = 0,95$, $r_{s1} = 0,97$, $r_{s2} = 0,85$. Porównać wynik z wynikami uzyskanymi w przykładach 4.11 i 4.14.

Rozwiązanie

Podobnie, jak w przykładzie 4.14, oznaczmy przez:

A – wykrycie wystrzelonej rakiety,

B_1 – zdarzenie polegające na trafieniu w wykrytą rakietę przez wyrzutnię 1,

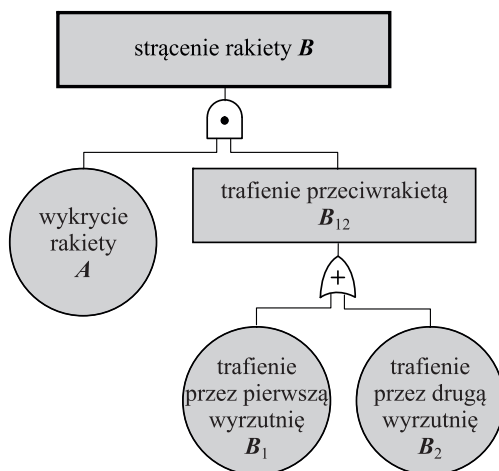
B_2 – zdarzenie polegające na trafieniu w wykrytą rakietę przez wyrzutnię 2,

B – strącenie rakiety.

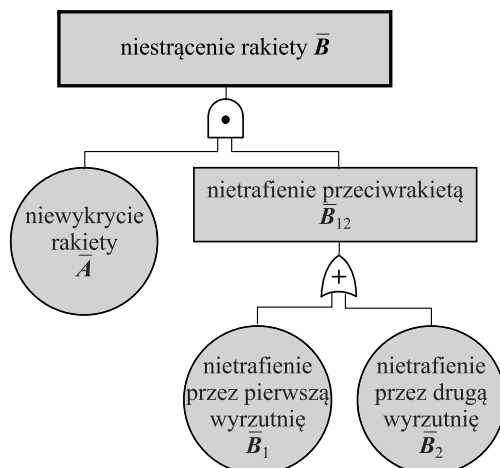
Z opisu działania systemu obrony przeciwrakietowej, przedstawionego w treści przykładu 4.11, wynika, że do strącenia rakiety (zdarzenia B) dochodzi, jeśli rakietę zostanie wykryta (zdarzenie A) i zostanie trafiona albo przez wyrzutnię 1 albo przez wyrzutnię 2. Takie działanie można więc przedstawić w graficznej formie drzewa zdarzeń pożądanых, jak na rysunku 4.16, albo pośrednio w formie drzewa zdarzeń niepożądanых, jak na rysunku 4.17.

W przypadku korzystania z drzewa przedstawionego na rysunku 4.16 wyznaczanie prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia B , czyli strącenia rakiety, przebiega według procedury takiej, jak w przykładzie 4.14. W niniejszym przykładzie wykorzystajmy do tego celu drzewo przedstawione na rysunku 4.17. Zdarzeniem szczytowym jest w tym drzewie zdarzenie przeciwne do zdarzenia B . Przyjmujemy założenia upraszczające wspomniane wcześniej, że zdarzenia podstawowe są niezależne i że prawdopodobieństwa ich zajścia są niewielkie (patrz dane). Poszukiwane prawdopodobieństwo związane jest ze zdarzeniem szczytowym drzewa relacją

$$P\{B\} = 1 - P\{\bar{B}\}. \quad (4.49)$$



Rys. 4.16. Drzewo zdarzeń prowadzących do strącenia rakiety



Rys. 4.17. Drzewo zdarzeń prowadzących do niestrącenia rakiety

Jak wynika z postaci drzewa, prawdopodobieństwo niestrącenia rakiety, czyli prawdopodobieństwo zdarzenia \bar{B} , wynosi w przybliżeniu (w przybliżeniu ze względu na założenia upraszczające)

$$P\{\bar{B}\} = P\{\bar{A} \cup \bar{B}_{12}\} = P\{\bar{A}\} + P\{\bar{B}_{12}\},$$

gdzie:

$$P\{\bar{A}\} = 1 - r_w,$$

$$P\{\bar{B}_{12}\} = P\{\bar{B}_1\}P\{\bar{B}_2 | B_1\} = (1 - r_{s1})(1 - r_{s2}).$$

Stąd

$$P\{\bar{B}\} = 1 - r_w + (1 - r_{s1})(1 - r_{s2}).$$

Zatem wyrażeniu (4.49) możemy nadać postać

$$P\{B\} = r_w - (1 - r_{s1})(1 - r_{s2}).$$

W rezultacie podstawienia danych do tego wzoru otrzymujemy

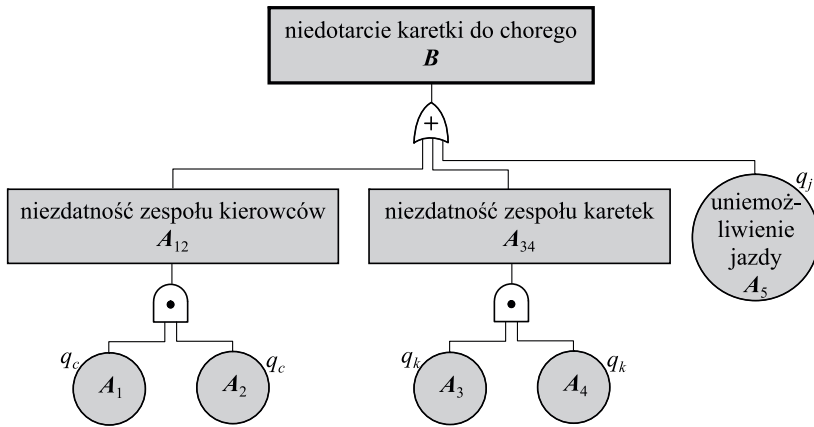
$$P\{B\} = 0,95 - (1 - 0,97)(1 - 0,85) = 0,9455.$$

Jest to więc wynik praktycznie taki sam, jak uzyskany innymi metodami w przykładach 4.11 i 4.14.

PRZYKŁAD 4.17

W chwili wezwania do chorego w stacji pogotowia ratunkowego znajdują się 2 karetki i 2 kierowców. Prawdopodobieństwo niepodjęcia zadania przez kierowcę

wynosi $P\{A_1\} = P\{A_2\} = q_c = 0,05$, a prawdopodobieństwo przebywania karetki w tym czasie w fazie naprawy wynosi $P\{A_3\} = P\{A_4\} = q_k = 0,02$. Prawdopodobieństwo wystąpienia w okresie przejazdu do chorego zdarzenia, uniemożliwiającego kontynuowanie jazdy, wynosi $P\{A_5\} = q_j = 5 \cdot 10^{-3}$. Opisane przyczyny ewentualnego niedotarcia karetki pogotowia do chorego zespół ekspertów zobrazował w postaci drzewa przedstawionego na rysunku 4.18. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na niedotarciu karetki do chorego po przyjęciu zgłoszenia.



Rys. 4.18. Drzewo przyczyn niedotarcia karetki do chorego

Rozwiązanie

Podobnie, jak w przykładzie 4.16, zakładamy, że zdarzenia podstawowe są niezależne i że ich prawdopodobieństwa są względnie małe (patrz dane). Te założenia uzasadniają korzystanie z relacji (4.44) i (4.45) przy wyznaczaniu prawdopodobieństwa $P\{B\}$. Zgodnie z nimi

$$P\{B\} = P\{A_{12}\} + P\{A_{34}\} + P\{A_5\}, \quad (4.50)$$

gdzie:

$$P\{A_{12}\} = P\{A_1\}P\{A_2\} = q_c^2,$$

$$P\{A_{34}\} = P\{A_3\}P\{A_4\} = q_k^2,$$

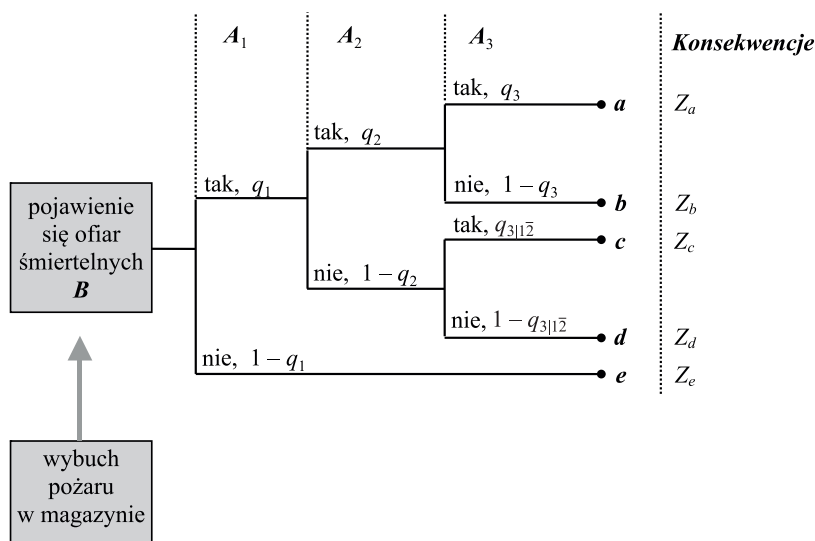
$$P\{A_5\} = q_j.$$

Zatem

$$P\{B\} = q_c^2 + q_k^2 + q_j = (0,05)^2 + (0,02)^2 + 0,005 = 0,0079.$$

PRZYKŁAD 4.18

Jednym ze zdarzeń, wskazanych przez ekspertów w ramach identyfikacji zagrożeń w pewnym magazynie, jest wybuch pożaru. Zgodnie z procedurami powinna zadziałać wówczas zakładowa służba przeciwpożarowa, a jeśli nie zadziałała poprawnie, to w tej sytuacji powinna odpowiednio zadziałać zewnętrzna straż pożarna. Straty ludzkie, określone liczbą ofiar śmiertelnych, zależą od poprawności działania wspomnianych służb. Przebieg zdarzeń w sytuacji wybuchu pożaru eksperci zobrazowali za pomocą drzewa zdarzeń przedstawionego na rysunku 4.19, przy czym symbole A_1 oraz A_2 oznaczają zdarzenia polegające na niepoprawnym działaniu służb przeciwpożarowych: zakładowej oraz zewnętrznej, a symbol A_3 oznacza zajście wypadku (pojawienie się strat ludzkich).



Rys. 4.19. Drzewo scenariuszy przebiegu zdarzeń po wybuchu pożaru w magazynie

Każdemu scenariuszowi przebiegu zdarzeń przypisany jest rozmiar strat ludzkich w postaci prawdopodobieństwa $Z_i = P\{B|i\}$ wystąpienia ofiar śmiertelnych. Eksperci oszacowali wartości wielkości uwzględnionych w drzewie. Wynoszą one: $Z_a = 0,92$, $Z_c = 0,10$, $Z_b = Z_d = Z_e = 0$ (gdyż przy przebiegu zdarzeń według scenariuszy b , d i e nie dochodzi do wypadku); $q_1 = 0,3$, $q_2 \equiv q_{2|1} = 0,2$, $q_3 \equiv q_{3|12} = 0,95$, $q_{3|12} = 0,10$.

Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo pojawienia się ofiar śmiertelnych, które może spowodować wybuch pożaru w analizowanym magazynie.

Rozwiązanie

Z postaci drzewa zdarzeń przedstawionego na rysunku 4.19 wynika, że do strat ludzkich w postaci ofiar śmiertelnych (do zdarzenia **B**) może dojść w rezultacie przebiegu zdarzeń po wybuchu pożaru według jednego z pięciu scenariuszy.

Zgodnie ze wzorem (4.47) na prawdopodobieństwo zupełne poszukiwane prawdopodobieństwo wynosi

$$P\{\mathbf{B}\} = \sum_{i=a}^e P\{\mathbf{i}\} Z_i = P\{\mathbf{a}\} Z_a + P\{\mathbf{b}\} Z_b + P\{\mathbf{c}\} Z_c + P\{\mathbf{d}\} Z_d + P\{\mathbf{e}\} Z_e, \quad (4.51)$$

gdzie prawdopodobieństwa przebiegu zdarzeń (po wybuchu pożaru) według scenariuszy **a–e** wynoszą odpowiednio:

$$\left. \begin{aligned} P\{\mathbf{a}\} &= q_1 q_2 q_3, \\ P\{\mathbf{b}\} &= q_1 q_2 (1 - q_3), \\ P\{\mathbf{c}\} &= q_1 (1 - q_2) q_{3|1\bar{2}}, \\ P\{\mathbf{d}\} &= q_1 (1 - q_2) (1 - q_{3|1\bar{2}}), \\ P\{\mathbf{e}\} &= 1 - q_1. \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

Ponieważ prawdopodobieństwa pojawienia się ofiar śmiertelnych, przypisane scenariuszom **b**, **d** i **e**, wynoszą $Z_b = Z_d = Z_e = 0$, więc wyrażenie (4.51) po uwzględnieniu także odpowiednich wzorów (4.52) przybiera postać

$$P\{\mathbf{B}\} = q_1 q_2 q_3 Z_a + q_1 (1 - q_2) q_{3|1\bar{2}} Z_c.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy

$$\begin{aligned} P\{\mathbf{B}\} &= 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,95 \cdot 0,92 + 0,3(1 - 0,2) \cdot 0,10 \cdot 0,10 = \\ &= 0,05244 + 0,00240 = 0,05484. \end{aligned} \quad (4.53)$$

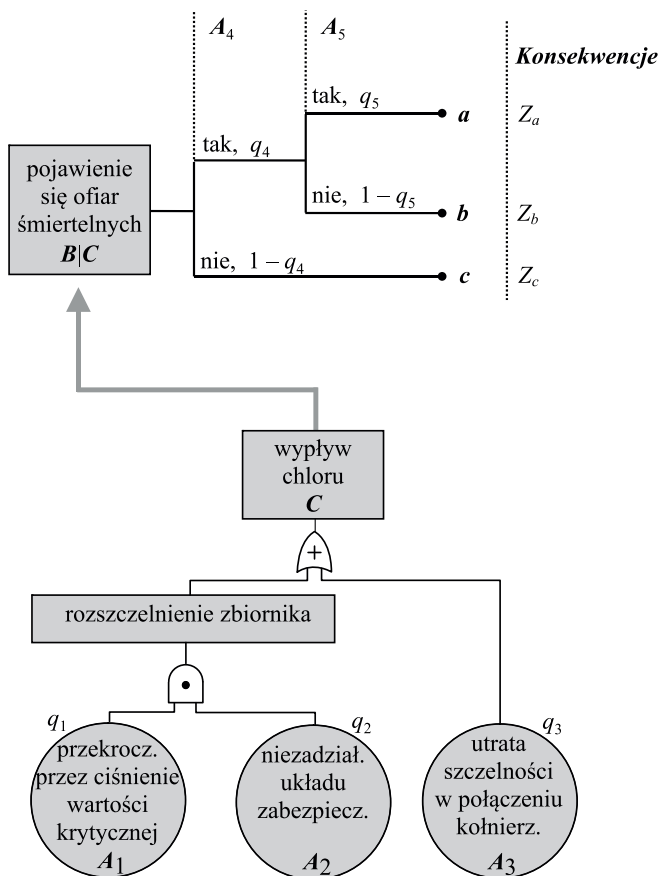
Prawdopodobieństwo pojawienia się ofiar śmiertelnych, które może spowodować wybuch pożaru w analizowanym magazynie, wynosi zatem około 0,055.

Jak można było przypuszczać, przebieg zdarzeń według scenariusza **a** jest kilkadziesiąt razy groźniejszy niż przebieg zdarzeń według scenariusza **c**. Wskazują na to liczby (4.53) uzyskane w trakcie obliczeń.

PRZYKŁAD 4.19

W niewielkiej hali zakładu produkcyjnego znajduje się instalacja chemiczna. Jednym ze zdarzeń, wskazanych przez ekspertów w ramach identyfikacji zagrożeń związanych z tą instalacją, jest wypływ z niej chloru. Przyczyny tego zdarzenia niepożądanego oraz scenariusze przebiegu zdarzeń po zajściu takiego zdarzenia

ekspersi zobrazowali w formie odpowiednich drzew zdarzeń. Są one przedstawione na rysunku 4.20.



Rys. 4.20. Drzewo przyczyn wypływu chloru oraz drzewo scenariuszy przebiegu zdarzeń po pojawieniu się chloru w hali (A_4 – zablokowanie głównych drzwi wyjściowych, A_5 – nieotwarcie wyjścia awaryjnego)

Znane są wartości prawdopodobieństw zdarzeń A_1 – A_5 . Wynoszą one odpowiednio:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= 2 \cdot 10^{-4}, \\ q_3 &= 0,5 \cdot 10^{-4}, \end{aligned} \right\} \text{w ciągu roku} \quad \begin{aligned} q_2 &\equiv q_{2|1} = 0,08, \\ q_{2|\bar{1}} &= 0, \\ q_4 &= 0,01, \\ q_5 &\equiv q_{5|4} = 0,90. \end{aligned}$$

Znane są także prawdopodobieństwa $Z_i = P\{\mathbf{B}|i\}$ wystąpienia ofiar śmiertelnych w rezultacie przebiegu zdarzeń według scenariuszy a , b i c po wypływie chloru: $Z_a = 0,92$, $Z_b = 0,20$, $Z_c = 0$.

Korzystając z zasad metod drzew, należy wyznaczyć prawdopodobieństwo pojawienia się ofiar śmiertelnych w ciągu 1 roku funkcjonowania instalacji chemicznej, związane z możliwością wypływu z niej chloru.

Rozwiązanie

Poszukiwane prawdopodobieństwo oznaczmy symbolem Λ . Aby doszło do wspomnianych strat ludzkich, konieczne jest zajście zdarzenia C i zdarzenia B . Zatem

$$\Lambda = P\{C \cap B\} = P\{C\}P\{B|C\}. \quad (4.54)$$

Jak wynika z drzewa przyczyn wypływu chloru (rys. 4.20),

$$P\{C\} = q_1 q_2 + q_3. \quad (4.55)$$

Na podstawie drzewa scenariuszy przebiegu zdarzeń po zajściu zdarzenia C stwierdzamy, że

$$P\{B|C\} = q_4 q_5 Z_a + q_4 (1 - q_5) Z_b + (1 - q_4) Z_c. \quad (4.56)$$

W rezultacie podstawienia wyrażeń (4.55) i (4.56) do wzoru (4.54) otrzymujemy

$$\Lambda = (q_1 q_2 + q_3) [q_4 q_5 Z_a + q_4 (1 - q_5) Z_b + (1 - q_4) Z_c],$$

a po podstawieniu danych liczbowych

$$\begin{aligned} \Lambda &= (2 \cdot 10^{-4} \cdot 0,08 + 0,5 \cdot 10^{-4}) [0,01 \cdot 0,90 \cdot 0,92 + 0,01(1 - 0,90)0,20 + (1 - 0,01) \cdot 0] = \\ &= 0,56 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Zatem prawdopodobieństwo pojawienia się ofiar śmiertelnych w ciągu 1 roku funkcjonowania instalacji chemicznej, związane z możliwością wypływu z niej chloru, wynosi $\Lambda = 0,56 \cdot 10^{-6}$.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

Zadanie 4.20

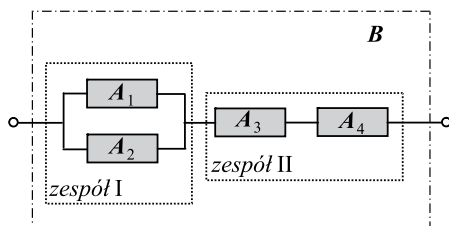
Sytuację opisaną w treści zadania 4.11 należy przedstawić w formie schematu blokowego, a następnie, stosując zasady tej metody graficznej, wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na niedotarciu karetki do chorego po przyjęciu zgłoszenia.

Zadanie 4.21

Obiekt składa się z dwóch zespołów. W każdym z nich są dwa jednakowe elementy. W rezultacie modelowania niezawodności tego obiektu zdarzenie B polegające na uszkodzeniu obiektu

w określonym czasie zobrazowano za pomocą schematu blokowego przedstawionego na rysunku 4.21. Czas poprawnego funkcjonowania każdego z czterech wyróżnionych elementów do wystąpienia uszkodzenia A_i elementu jest opisany za pomocą rozkładu wykładniczego o parametrach odpowiednio: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,020$ 1/rok i $\lambda_3 = \lambda_4 = 0,005$ 1/rok. Opierając się na przedstawionym schemacie blokowym, należy:

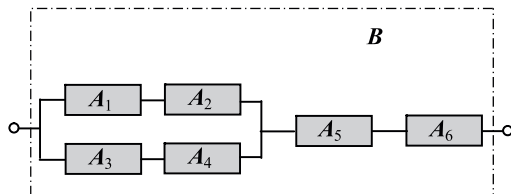
- 1) wyznaczyć prawdopodobieństwo wystąpienia uszkodzenia obiektu w ciągu 1 roku,
- 2) wskazać zespół bardziej zawodny.



Rys. 4.21. Schemat blokowy zależności uszkodzenia analizowanego obiektu od wyróżnionych w nim uszkodzeń

Zadanie 4.22

W rezultacie modelowania niezawodności pewnego systemu zdarzenie B polegające na uszkodzeniu systemu w określonym czasie zobrazowano za pomocą schematu blokowego przedstawionego na rysunku 4.22. Wyróżnione w nim zdarzenia A_i są uszkodzeniami elementów systemu. Są one niezależne. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo R nieuszkodzenia systemu w czasie t przy założeniu, że znane są prawdopodobieństwa q_i uszkodzenia elementów systemu w tym czasie.

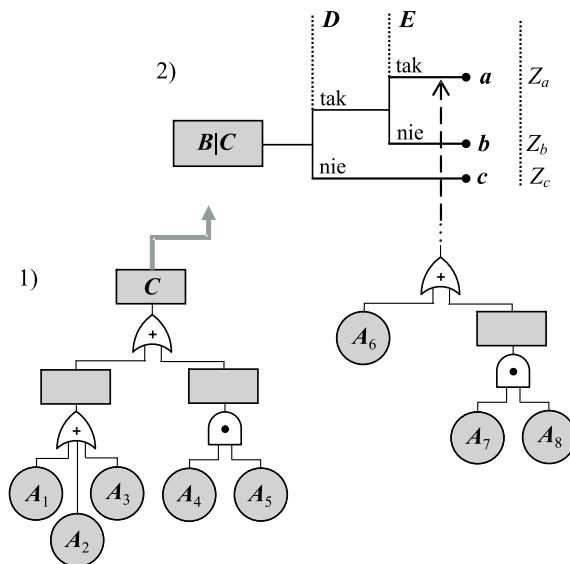


Rys. 4.22. Schemat blokowy zależności uszkodzenia analizowanego systemu od wyróżnionych w nim uszkodzeń

Zadanie 4.23

W rezultacie analizy pewnego systemu ustalono i przedstawiono w formie drzewa przyczyny zdarzenia C (rys. 4.23.1).

Zajście zdarzenia C może wywołać określone straty finansowe B (np. $B \geq 1$ mln zł). Prawdopodobieństwo pojawienia się takich strat zależy od przebiegu kolejnych zdarzeń po zajściu zdarzenia C . Przewidywane scenariusze są przedstawione w postaci drzewa scenariuszy z przypisanymi tym scenariuszom znanymi konsekwencjami $Z_i = P\{B|i\}$, gdzie $i = a, b, c$ (rys. 4.23.2). Znane są także prawdopodobieństwa: $q_1 - q_5$ zajść zdarzeń $A_1 - A_5$ w ciągu 1 roku, $q_6 - q_8$ zajść zdarzeń $A_6 - A_8$ (jako przyczyn zdarzenia E) oraz Q zajścia zdarzenia D . Korzystając z zasad metod drzew, należy wyznaczyć prawdopodobieństwo pojawienia się strat finansowych B w ciągu 1 roku funkcjonowania systemu, związane z możliwością wystąpienia zdarzenia C .



Rys. 4.23. Drzewo przyczyn zdarzenia **C** oraz drzewo scenariuszy przebiegu zdarzeń po pojawieniu się tego zdarzenia

Zadanie 4.24

Zespół ekspertów analizował przyczyny ewentualnego zawalenia się dachu pawilonu handlowego. W rezultacie tej analizy utworzony został model przyczyn w postaci drzewa niesprawności, przedstawionego na rysunku 4.24. Ten sam zespół, stosując metodę ekspercką i na podstawie informacji statystycznych, oszacował prawdopodobieństwa zdarzeń podstawowych, wyróżnionych w drzewie. Celem zadania jest oszacowanie prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia szczytowego w ciągu 1 roku. Dane:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} q_1 &= 8 \cdot 10^{-3}, \\ q_2 &= 2 \cdot 10^{-3}, \\ q_3 &= 2 \cdot 10^{-1}, \end{aligned} \right\} \text{ w ciągu 1 roku} \\
 & P\{A_4 | A_3\} = q_{4|3} \equiv q^4 = 0,20.
 \end{aligned}$$

Zadanie 4.25

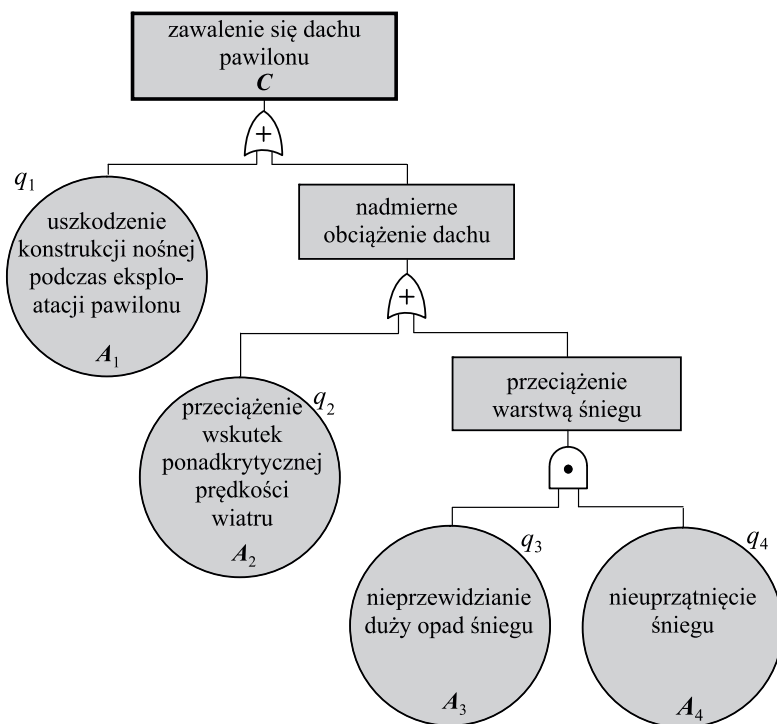
Opisane w treści zadania 4.14 działania pilota szybowca w sytuacji po zablokowaniu w locie steru wysokości należy przedstawić w formie drzewa scenariuszy przebiegu zdarzeń i na podstawie jego postaci wyznaczyć prawdopodobieństwo utraty życia przez pilota w tej sytuacji.

Zadanie 4.26

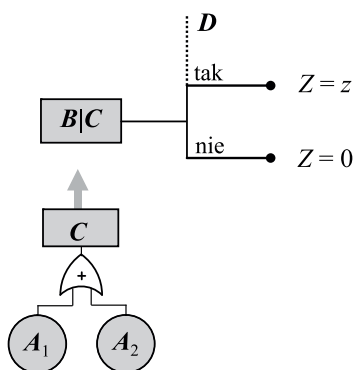
Przedstawione na rysunku 4.25 drzewo dotyczy fazy lądowania samolotu. Niepoprawne podejście do lądowania (zdarzenie **C**) może być spowodowane uszkodzeniem w układzie sterowania (zdarzenie **A**₁) albo niepoprawnym, tzn. niezgodnym z procedurami, działaniem pilota podczas lądowania (zdarzenie **A**₂). Prawdopodobieństwa zajścia tych zdarzeń w jednym lądowaniu wynoszą odpowiednio q_1 i q_2 . Prawdopodobieństwo utraty życia przez co najmniej jedną osobę (prawdopodobieństwo zdarzenia **B**), spowodowanej niepoprawnym przyziemieniem (zdarzenie **D**) w tej sytuacji.

acji, wynosi z . Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo utraty życia przez co najmniej jedną osobę, związane z niepoprawnym podejściem do lądowania. Dane:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= 2 \cdot 10^{-5}, \\ q_2 &= 5 \cdot 10^{-4}, \end{aligned} \right\} \text{ w 1 lądowaniu} \quad P\{\mathbf{D}\} = 0,50, z = 0,20.$$



Rys. 4.24. Drzewo przyczyn zawalenia się dachu pawilonu handlowego



Rys. 4.25. Drzewo przyczyn niepoprawnego podejścia do lądowania (zdarzenia C) oraz drzewo scenariuszy przebiegu zdarzeń po pojawieniu się tego zdarzenia

ELEMENTY STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ

5.1. PODSTAWOWE POJĘCIA I ROZKŁADY PRAWDOPODOBIENSTWA WYKORZYSTYWANE W STATYSTYCE MATEMATYCZNEJ

Przykłady i zadania prezentowane w poprzednich rozdziałach dotyczą jednego z wielu obszarów działalności inżynierskiej, mianowicie – obliczeń ułatwiających analizy prowadzone zwłaszcza w fazie projektowania obiektu, ale także jego wytwarzania i eksploatacji. Podstawą każdego obliczenia inżynierskiego jest przygotowany wcześniej model analizowanego zjawiska (np. zużycia zmęczeniowego elementu), stanu (np. granicy wytrzymałości R_m materiału elementu), procesu (np. planowanej eksploatacji obiektu) itd. Stosowane w takich obliczeniach modele mają postać matematyczną, nierzadko – probabilistyczną, i są tworzone na podstawie zgromadzonej wiedzy o obiekcie analiz.

Innym bardzo ważnym obszarem działalności inżyniera jest prowadzenie badań eksperymentalnych oraz analizowanie i interpretowanie uzyskiwanych wyników badań. Zasadnicze cele takich działań to:

- pozyskiwanie wiedzy i danych liczbowych potrzebnych do zbudowania wspomnianych powyżej modeli obliczeniowych,
- weryfikacja wyników teoretycznych, czyli uzyskanych poprzez analizę modelu,
- sprawdzenie istotności wpływu poczynionych uproszczeń przy tworzeniu modelu na wyniki itd.

Bywa i tak, że brak jest wiedzy potrzebnej do zbudowania odpowiedniego modelu obliczeniowego. Wtedy tylko wyniki badań eksperymentalnych mogą dostarczyć informacji potrzebnych inżynierowi.

Wiedzy potrzebnej do zaplanowania badań eksperymentalnych oraz analizowania i interpretowania ich wyników dostarcza statystyka matematyczna. Wydaje się, że najważniejszymi dla inżyniera zagadnieniami z tej dziedziny matematyki są:

- estymacja poszukiwanych wielkości (np. granicy wytrzymałości R_m materiału konstrukcyjnego), czyli wyznaczanie ich wartości na podstawie uzyskanych wyników badań doświadczalnych,
- testy zgodności, służące na przykład do określania matematycznej postaci rozkładu prawdopodobieństwa wielkości opisującej cechę obiektu (np. rozkładu granicy R_m),
- regresja, czyli poszukiwanie zależności zmiennej losowej od innej zmiennej (np. zależności granicy wytrzymałości R_m określonej stali od zawartości składnika stopowego).

W niniejszym rozdziale ograniczymy się do przedstawienia przykładów i zadań dotyczących pierwszego z tych zagadnień statystyki matematycznej, tzn. estymacji.

Zacznijmy od przypomnienia podstawowych pojęć z zakresu statystyki matematycznej.

Cała rozważana zbiorowość obiektów, z założenia jednakowych ze względu na badaną cechę, mogących się jednak różnić w sposób losowy, nazywana jest **populacją generalną**. Badania eksperymentalne prowadzone w celu określenia interesującej badacza cechy elementów tej zbiorowości nie są dokonywane zwykle na całej populacji, lecz na statystycznej próbce obiektów o odpowiednio dobranej liczebności. Tak określony podzbiór obiektów przeznaczony do badań jest nazywany **próbką losową**.

Czynności związane z szacowaniem wartości \hat{x} nieznanej wartości wielkości x , charakteryzującej badaną cechę zbiorowości obiektów w ich populacji generalnej, nazywa się **estymacją** tej wielkości. Wielkościami x , które mogą być szacowane na podstawie wyników badań eksperymentalnych, są na przykład parametry rozkładu prawdopodobieństwa (np. wartość oczekiwana i odchylenie standardowe), wartości prawdopodobieństw traktowanych jako dane w analizach probabilistycznych (np. w analizach ryzyka i w analizach niezawodności), wielkości cechujące rozważany obiekt potrzebne w deterministycznych analizach inżynierskich itd. Wielkość \hat{x} nosi nazwę **estymatora** wielkości x .

Przyjmijmy, że badaniom eksperymentalnym poddano próbkę losową o liczebności N obiektów z populacji i że celem badań jest doświadczalne wyznaczenie wielkości x będącej pewną właściwością obiektów w populacji (np. granicy wytrzymałości R_m materiału, z którego wykonywane są wałki maszyny, albo średnicy d tego wałka). Każda wielkość x określana w wyniku eksperymentu jest dla człowieka (istoty niedoskonałej) zawsze zmienną losową o mniejszym lub większym rozrzucie. Z tego powodu w rezultacie badań próbki losowej obiektów otrzymuje się ciąg różniących się wartości x_1, x_2, \dots, x_N wielkości x . Jest on podstawą do obliczenia na przykład wartości średniej

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (5.1)$$

oraz empirycznego odchylenia standardowego

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (5.2)$$

W praktyce inżynierskiej wartość średnią \bar{x} traktuje się zazwyczaj jako oszacowanie nieznanej wielkości x , a odchylenie s uzyskane z próbki – jako przybliżoną miarę rozrzutu losowego rzeczywistych realizacji x .

Wyniki uzyskane na podstawie badań jednej próbki losowej należy traktować jako oszacowania przybliżone. Powtarzając bowiem badania na takiej samej próbce losowej (identycznie wylosowanej próbce z populacji generalnej), tych samych obiektów, uzyskuje się inne wartości x_1, x_2, \dots, x_N . W rezultacie wyznaczany estymator \hat{x} , np. średnia (5.1), może przybierać różne wartości od próbki do próbki. W związku z tym każdą z wielkości x_i oraz wynikający z nich estymator \hat{x} można traktować jako zmienne losowe. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej \hat{x} zależy przede wszystkim od liczebności N próbki i od postaci funkcji $\hat{x} = \varphi(x_1, x_2, \dots)$. Estymatorów poszukiwanej wielkości, czyli postaci funkcji φ , może być teoretycznie wiele. Jedne z nich dają lepsze, a inne gorsze oszacowania tej samej poszukiwanej wielkości x . Dąży się do tego, by estymator miał właściwości: nieobciążoności, zgodności i dużej efektywności. Właściwość nieobciążoności oznacza, że

$$E\hat{x} = x. \quad (5.3)$$

Duża efektywność estymatora oznacza, że odchylenie standardowe zmiennej \hat{x} jest małe (czyli małe są rozrzuty losowe wartości \hat{x} uzyskiwanych w kolejnych próbkach). Właściwość zgodności ma estymator wtedy, gdy jest stochastycznie zbliżony do wartości x , tzn. gdy dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{|\hat{x} - x| > \varepsilon\} = 0.$$

Oznacza to, że ze wzrostem liczebności N próbki rośnie dokładność oszacowania wielkości x .

Sposoby poszukiwania postaci matematycznych funkcji φ , czyli estymatorów, są przedstawiane obszernie w podręcznikach z zakresu statystyki matematycznej.

Estymatorem nieobciążonym, zgodnym i najefektywniejszym wielkości x , charakteryzującej określoną cechę populacji obiektów i wyznaczanej na podstawie wyników badań próbki z tej populacji, jest średnia opisana przez funkcję (5.1). Podobnie dobrym estymatorem prawdopodobieństwa $p = P\{A\}$ zajścia określonego zdarzenia A jest częstość w określana przez funkcję

$$w = \frac{b}{N}, \quad (5.4)$$

gdzie: N – liczba jednakowo możliwych zdarzeń (wyników pomiarów, doświadczeń, obserwacji, ...), czyli liczebność próbki losowej, b – liczba zająć zdarzeń sprzyjających zająćiu zdarzenia A .

W praktyce inżynierskiej wspomniane dwa estymatory są wykorzystywane najczęściej, tzn.:

- średnia, określona przez wzór (5.1), stosowana zwłaszcza do opracowywania wyników eksperymentalnych badań nieznanymi cech obiektów,
- częstość, określona przez wzór (5.4), stosowana przy szacowaniu prawdopodobieństw.

Oszacowanie nieznaney wartości wielkości x za pomocą jednej liczby \hat{x} , uzyskanej za pomocą na przykład takich wyrażeń, jak (5.1) lub (5.4), jest przykładem **estymacji punktowej**. W tym przypadku nie jest określona dokładność takiego oszacowania. Dlatego w badaniach eksperymentalnych, zwłaszcza gdy ich celem jest wyznaczenie wielkości x określającej nieznaną cechę obiektów w populacji, częściej stosuje się tak zwaną **estymację przedziałową**. Oparta jest ona na wspomnianym powyżej spostrzeżeniu, że wyniki badań próbki obiektów są losowe. Do tej bogatszej w informacje metody estymacji potrzebna jest wiedza o możliwym rodzaju rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej \hat{x} . Jeśli taka wiedza jest dostępna, to na tej podstawie mogą być określone dwie granice przedziału \hat{x}_d i \hat{x}_g takie, że prawdopodobieństwo pokrycia nieznaney wartości x przez przedział $[\hat{x}_d, \hat{x}_g]$ wynosi β , czyli

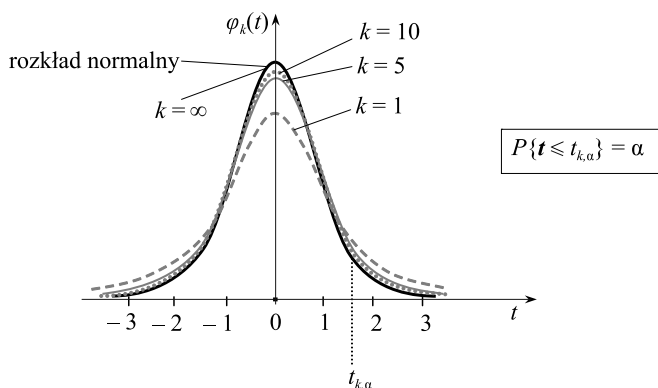
$$P\{\hat{x}_d \leq x \leq \hat{x}_g\} = \beta. \quad (5.5)$$

Przedział ten nazywa się **przedziałem ufności**, a liczbę β – **poziomem ufności**. Zwykle przyjmuje się $\beta = 0,90$ lub $0,95$. Należy podkreślić, że w sytuacji, gdy badana jest tylko jedna próbka losowa (np. dysponujemy tylko jednym zbiorem wyników badań), otrzymuje się tylko jedną realizację granic przedziału ufności, a przedział ten ma wówczas postać $\hat{x}_d \leq x \leq \hat{x}_g$. W dalszym tekście zakładamy, że analizy statystyczne są dokonywane na podstawie jednego zbioru wyników badań, co w praktyce ma zwykle miejsce.

Do wyznaczania granic przedziału ufności wykorzystuje się kilka rozkładów prawdopodobieństwa estymatora \hat{x} , typowych dla statystyki matematycznej. Takimi rozkładami są głównie: chi-kwadrat, t Studenta, F Snedecora i normalny. W niniejszym opracowaniu są stosowane trzy z nich, mianowicie: rozkład normalny, omówiony w podrozdziale 2.2, oraz rozkłady t Studenta i F Snedecora.

Rozkład t Studenta zmiennej losowej t jest określany przez dystrybuantę lub przez gęstość prawdopodobieństwa takiej zmiennej. Wyrażające je wzory są dość złożone i wiedza o nich inżynierowi nie jest niezbędna. Dlatego ograniczymy się tylko do podania kilku ogólnych informacji o rozkładzie. Zmienna losowa t może przybierać wartości z przedziału $(-\infty < t < \infty)$. Wykres jej gęstości prawdopodobieństwa $\varphi_k(t)$ jest symetryczny względem prostej $t = 0$ i podobny do wykresu gę-

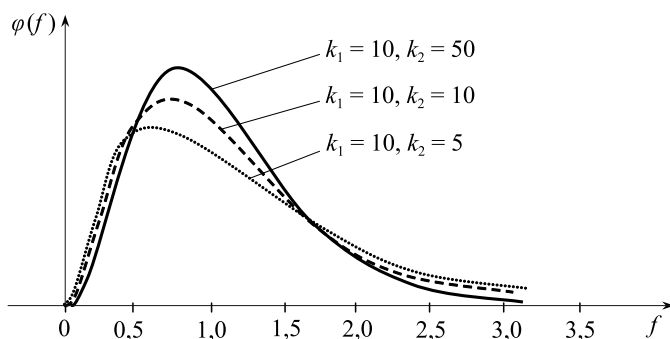
stości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego (rys. 5.1). Wartości funkcji $\varphi_k(t)$ zależą od parametru k , nazywanego liczbą stopni swobody. Wielkością związaną z rozkładem t Studenta, stosowaną przy wyznaczaniu granic przedziału ufności, jest kwantyl $t_{k,\alpha}$ zmiennej losowej t zilustrowany na rysunku 5.1. Liczba stopni swobody $k = N - 1$, zależy więc od liczebności próbki statystycznej.



Rys. 5.1. Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej o rozkładzie t Studenta

Przy rosnącym k rozkład t Studenta jest szybko zbieżny do standaryzowanego rozkładu normalnego.

Rozkład F Snedecora zmiennej losowej f znacznie różni się od rozkładu t Studenta. Zmienna ta może przybierać wartości z przedziału $(0 \leq f < \infty)$. Wartości gęstości prawdopodobieństwa $\varphi(f)$ zależą od dwóch parametrów, mianowicie k_1 i k_2 , nazywanych stopniami swobody. Przy wyznaczaniu granic przedziału ufności parametry te zależą od liczebności próbki statystycznej i od uzyskanego wyniku badań statystycznych (podrozdz. 5.3). Przykłady rozkładu F Snedecora są podane na rysunku 5.2.



Rys. 5.2. Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej o rozkładzie F Snedecora o wybranych parach stopni swobody k_1 i k_2

5.2. ESTYMACJA CECHY

Do obszaru działań inżyniera należą między innymi badania doświadczalne, których celem jest oszacowanie wartości nieznaney wielkości, będącej miarą jego określonej cechy. Takimi cechami są na przykład: wymiary i cechy fizyczne (wytrzymałość, ciepło właściwe, chropowatość powierzchni, trwałość i in.). Wówczas dobrym, jak wspomniano powyżej, estymatorem \hat{x} takiej wielkości x jest średnia z wartości x_1, x_2, \dots, x_N , wyznaczana za pomocą estymatora (5.1).

Do estymacji punktowej wystarczający jest wzór (5.1). Przyjmuje się, że

$$x \approx \hat{x} \equiv \bar{x}. \quad (5.6)$$

Do estymacji przedziałowej potrzebne jest wyznaczenie granic przedziału ufności, czyli wielkości \hat{x}_d i \hat{x}_g (patrz wyrażenie (5.5)). Postać wyrażeń określających te granice zależy od postaci rozkładu prawdopodobieństwa wielkości opisujących wspomniane cechy. Zakłada się, że są one normalne, co na ogół nie przeczy obserwacjom. Granice przedziału ufności wynoszą wtedy

$$\begin{aligned} \hat{x}_d &= \bar{x} - t_{k,\alpha} \frac{s}{\sqrt{N-1}}, \\ \hat{x}_g &= \bar{x} + t_{k,\alpha} \frac{s}{\sqrt{N-1}}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

gdzie $t_{k,\alpha}$ jest kwantylem rozkładu t Studenta o $k = N - 1$ stopniach swobody zmiennej losowej t , określone dla dwustronnego przedziału ufności, a s jest empirycznym odchyleniem standardowym, określonym przez wzór (5.2). Wartości kwantyli $t_{k,\alpha}$, gdzie $\alpha = (1 + \beta)/2$, są podawane w formie tablic w podręcznikach z zakresu probabilistyki i statystyki matematycznej, np. w pracy [2]. Można je znaleźć także w internecie oraz w Załączniku 2. Warto dodać, że często we wspomnianych tablicach podawane są wartości $t_{k,\alpha}$ takie, że $P\{|t| \geq t_{k,\alpha}\} = \alpha$. W takim przypadku $\alpha = 1 - \beta$ i w tablicach tych należy wówczas szukać wartości $t_{k,1-\beta}$, charakterystycznej dla zmiennej losowej $|t|$. Są one równe kwantylom $t_{k,(1+\beta)/2}$ rozkładu zmiennej losowej t .

Wyrażenie (5.5) można więc przedstawić w postaci

$$P\left\{\bar{x} - t_{N-1,(1+\beta)/2} \frac{s}{\sqrt{N-1}} \leq x \leq \bar{x} + t_{N-1,(1+\beta)/2} \frac{s}{\sqrt{N-1}}\right\} = \beta. \quad (5.8)$$

Jak wspomniano już w podrozdziale 5.1, jeśli N jest dostatecznie duże, to rozkład t Studenta takiego estymatora, jak średnia \bar{x} , jest w przybliżeniu normalny. Wynika to również z centralnego twierdzenia granicznego. Wówczas granice przedziału ufności można określać przy użyciu przybliżonych wyrażeń

$$\begin{aligned} \hat{x}_d &= \bar{x} - y_\alpha \frac{s}{\sqrt{N}}, \\ \hat{x}_g &= \bar{x} + y_\alpha \frac{s}{\sqrt{N}}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

a prawdopodobieństwo, że poszukiwana wielkość jest zawarta w przedziale ufności, wyraża się wzorem

$$P\left\{\bar{x} - y_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{N}} \leq x \leq \bar{x} + y_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{N}}\right\} = \beta, \quad (5.10)$$

gdzie y_{α} jest kwantylem rzędu $\alpha = (1 + \beta)/2$ standaryzowanego rozkładu normalnego.

PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 5.1

Pewien wysokościomierz poddany został badaniom dokładności jego wskazań. Błędy h_i [m] wskazań w kolejnych 36 pomiarach zanotowano w tabeli 5.1. Stosując estymację punktową i estymację przedziałową, należy określić niedokładność wskazań wysokościomierza cechującą badany przyrząd.

Tabela 5.1. Wyniki pomiarów błędu h_i [m] wskazań wysokościomierza

+2	-3	-11	+4	-6	+1	+7	-8	+2	0	+3	-1	-4	+3	-5	+9	-3	-6
-1	+1	+1	-2	+2	-1	+3	-10	+5	+5	-1	+12	0	-1	-2	-2	0	-3

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że miarą niedokładności wskazań wysokościomierza jest błąd h [m] jego wskazań i że estymatorem tej nieznannej wielkości jest średnia \bar{h} wyników pomiarów zamieszczonych w tabeli 5.1. Zgodnie ze wzorem (5.1)

$$\bar{h} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{36} h_i = -0,28 \text{ m.}$$

W celu określenia przedziału ufności, w którym może się mieścić błąd h , wyznaczmy teraz granice tego przedziału. Zastosujemy do tego wzory (5.7), które w analizowanym przypadku przybierają postać

$$\begin{aligned} h_d &= \bar{h} - t_{N-1, (1+\beta)/2} \frac{s}{\sqrt{N-1}}, \\ h_g &= \bar{h} + t_{N-1, (1+\beta)/2} \frac{s}{\sqrt{N-1}}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Występujące w tych wzorach empiryczne odchylenie standardowe s zmiennej losowej \hat{h} obliczamy, korzystając ze wzoru (5.2). W rezultacie otrzymujemy

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (h_i - \bar{h})^2} = \sqrt{\frac{1}{35} \sum_{i=1}^{36} (h_i + 0,28)^2} = 4,84 \text{ m.}$$

Przyjmijmy poziom ufności $\beta = 0,95$. Odpowiadający mu oraz liczbie pomiarów N kwantyl rozkładu t Studenta o $k = N - 1$ stopniach swobody $t_{k,\alpha} = t_{N-1,(1+\beta)/2} = t_{35;0,975}$ znajdujemy w tabeli umieszczonej w pracy [2] lub w Załączniku 2. Wynosi on $t_{35;0,975} = 2,03$.

Po podstawieniu danych liczbowych, w tym – wartości $\bar{h} = -0,28 \text{ m}$ i $s = 4,84 \text{ m}$, do wzorów (5.11) otrzymujemy:

$$h_d = -0,28 - 2,03 \cdot \frac{4,84}{\sqrt{36-1}} \approx -1,9 \text{ m,}$$

$$h_g = -0,3 + 2,03 \cdot \frac{5,4}{\sqrt{36-1}} \approx 1,4 \text{ m.}$$

Zatem określany poprzez pomiary błąd wskazań wysokościomierza jest zawarty w przedziale $-1,9 \text{ m} \leq h \leq +1,4 \text{ m}$, z prawdopodobieństwem $\beta = 0,95$.

Sprawdźmy jeszcze, na ile różne uzyskalibyśmy oszacowania granic przedziału ufności przy użyciu wzorów (5.9). Mają one postać:

$$h_d = \bar{h} - y_\alpha \frac{s}{\sqrt{N}}, \quad (5.12)$$

$$h_g = \bar{h} + y_\alpha \frac{s}{\sqrt{N}}.$$

W odpowiednich tabelach znajdujemy kwantyl y_α rzędu $\alpha = (1 + \beta)/2$ standaryzowanego rozkładu normalnego. Wynosi on $y_{(1+\beta)/2} = y_{0,975} = 1,96$. Po podstawieniu danych do wzorów (5.12) otrzymujemy

$$h_d = -0,28 - 1,96 \cdot \frac{4,84}{\sqrt{36}} \approx -1,9 \text{ m,}$$

$$h_g = -0,28 + 1,96 \cdot \frac{4,84}{\sqrt{36}} \approx 1,3 \text{ m.}$$

Wyniki uzyskane dwoma sposobami praktycznie nie różnią się. Nie dziwi to, gdyż duża jest liczba stopni swobody ($k = 35$) i rozkład t Studenta jest bliski standaryzowanemu rozkładowi normalnemu.

Uwaga: Wszystkie nieznane wielkości występujące w formułach (5.11) możemy także obliczyć przy użyciu programu MS Excel, korzystając z komend: ŚREDNIA, ODCHYLENIE.STANDARD, POPUL, a w przypadku kwantyla $t_{k,\alpha}$ – ROZKŁAD.T.OWD. W przypadku ostatniej komendy należy podać:

- wartość prawdopodobieństwa $P\{t \geq t_{k,\alpha}\} = \alpha$, gdzie $\alpha = (1 + \beta)/2$ (w naszym przykładzie został przyjęty poziom ufności $\beta = 0,95$),
- liczbę stopni swobody k zmiennej t (w analizowanym przykładzie $k = N - 1 = 35$).

Wielkości \bar{h} , s i $t_{k,\alpha}$ występujące we wzorach (5.11) można również wyznaczyć w inny sposób. Warto bowiem dodać, że w programie MS Excel, po uprzednim dograniu dodatku Analytics ToolPak, dostępne są komendy przeznaczone do wykonywania podstawowych analiz statystycznych, w tym wyznaczania różnych charakterystyk zmiennej losowej. W naszym przykładzie pomocna jest komenda Statystyka Opisowa, dostępna w zakładce Dane \rightarrow Analiza Danych. Wynikiem działania komendy są wielkości charakteryzujące analizowaną próbkę (a pośrednio – zmienną losową t), wśród których są obliczane w przykładzie: wartość średnia, odchylenie standardowe oraz połowa długości przedziału ufności na określonym poziomie.

PRZYKŁAD 5.2

W celu określenia granicy wytrzymałości doraźnej R_m stali, z której wykonywane są śruby, przeprowadzono na maszynie wytrzymałościowej badania $N = 10$ próbek o określonych przez normę wymiarach. W rezultacie uzyskano 10 wartości naprężeń $\sigma \equiv R_m$, przy których próbki pękały. Są one zamieszczone w tabeli 5.2.

Tabela 5.2. Wyniki badań granicy wytrzymałości doraźnej R_m

$R_{m,i}$ [MPa]	710	682	760	735	755	810	768	747	745	760
-----------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Na podstawie tych wyników badań należy określić wartość oczekiwaną ER_m granicy wytrzymałości doraźnej badanej stali.

Rozwiązanie

Na podstawie uzyskanych rezultatów badań należy określić wartość oczekiwaną ER_m granicy wytrzymałości materiału, z którego będą wykonywane śruby. Jej estymatorem punktowym jest średnia z wyników badań. Zgodnie ze wzorem (5.1) wynosi ona

$$\bar{R}_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_{m,i} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} R_{m,i} = 747 \text{ MPa.}$$

W celu określenia przedziału wartości, w którym może się znajdować nieznaną wartość ER_m , dokonajmy jeszcze estymacji przedziałowej. Ponieważ liczebność próbki losowej jest niewielka, to do wyznaczenia granic przedziału ufności zastosujemy wzory (5.7). W analizowanym przykładzie przybierają one postać:

$$\begin{aligned} R_{m,d} &= \bar{R}_m - t_{N-1,(1+\beta)/2} \frac{s}{\sqrt{N-1}}, \\ R_{m,g} &= \bar{R}_m + t_{N-1,(1+\beta)/2} \frac{s}{\sqrt{N-1}}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

gdzie: $t_{N-1,(1+\beta)/2}$ – kwantyl rozkładu t Studenta o $(N-1)$ stopniach swobody zmiennej losowej t , s – empiryczne odchylenie standardowe zmiennej losowej \hat{R}_m . Przyjmijmy za poziom ufności wartość $\beta = 0,99$. Wartości kwantyla $t_{k,\alpha} = t_{N-1,(1+\beta)/2} = t_{9; 0,995}$ znajdujemy w tabeli umieszczonej w Załączniku 2. Wynosi on $t_{9; 0,995} = 3,25$.

Empiryczne odchylenie standardowe s obliczamy przy użyciu wzoru (5.2). W rezultacie otrzymujemy

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (R_{m,i} - \bar{R}_m)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (R_{m,i} - 747)^2} = 34,2 \text{ MPa}.$$

Po podstawieniu tego wyniku i pozostałych danych do wzorów (5.13) otrzymujemy

$$R_{m,d} = 747 - 3,25 \cdot \frac{34,2}{\sqrt{10-1}} = 710 \text{ MPa},$$

$$R_{m,g} = 747 + 3,25 \cdot \frac{34,2}{\sqrt{10-1}} = 784 \text{ MPa}.$$

Zatem

$$P\{710 \text{ MPa} \leq E\mathbf{R}_m \leq 784 \text{ MPa}\} = 0,99,$$

czyli poszukiwana wartość oczekiwana $E\mathbf{R}_m$ granicy wytrzymałości doraźnej badanej stali jest zawarta w przedziale $710 \text{ MPa} \leq E\mathbf{R}_m \leq 784 \text{ MPa}$ z prawdopodobieństwem równym 0,99.

PRZYKŁAD 5.3

Jedna z podłużnic konstrukcji nośnej płatowca ma być kątownikiem $20 \times 20 \times 2$ wykonanym z duralu 2024 (PA 7). W celu określenia trwałości zmęczeniowej przeprowadzono na maszynie wytrzymałościowej badania $N = 10$ losowo wybranych egzemplarzy tych podłużnic. Badania polegały na poddaniu podłużnicy zmiennym naprężeniom o pewnym odpowiednio ustalonym widmie. W rezultacie uzyskano 10 wartości liczby n zmian naprężeń, przy których podłużnice pękały. Są one zamieszczone w tabeli 5.3. Taka liczba n jest uznawana za trwałość zmęczeniową elementu.

Tabela 5.3. Wyniki badań trwałości zmęczeniowej podłużnic duralowych

n_i [mln zmian]	37	23	76	45	42	51	29	18	64	56
-------------------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Stosując estymację punktową i estymację przedziałową, należy oszacować wartość oczekiwaną $E\mathbf{n}$ trwałości zmęczeniowej projektowanych podłużnic.

Rozwiązanie

Estymatorem punktowym wartości oczekiwanej En trwałości zmęczeniowej projektowanych podłużnic jest średnia z wyników badań. Zgodnie ze wzorem (5.1) wynosi ona

$$\bar{n} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} n_i = 44,1 \text{ mln.}$$

Ponieważ liczebność próbki losowej jest niewielka, to do wyznaczenia granic przedziału ufności zastosujemy, podobnie jak w przykładzie 5.2, wzory (5.7). W rozważanym przypadku przybierają one postać:

$$\begin{aligned} n_d &= \bar{n} - t_{N-1, (1+\beta)/2} \frac{s}{\sqrt{N-1}}, \\ n_g &= \bar{n} + t_{N-1, (1+\beta)/2} \frac{s}{\sqrt{N-1}}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

gdzie: $t_{N-1, (1+\beta)/2}$ – kwantyl rozkładu t Studenta o $(N-1)$ stopniach swobody zmiennej losowej t , s – empiryczne odchylenie standardowe zmiennej losowej \hat{n} . Przyjmijmy za poziom ufności wartość $\beta = 0,95$. Wartości kwantyla $t_{k, \alpha} = t_{N-1, (1+\beta)/2} = t_{9; 0,975}$ znajdujemy w tabeli umieszczonej w Załączniku 2. Wynosi on $t_{9; 0,975} = 2,26$.

Zgodnie ze wzorem (5.2) empiryczne odchylenie standardowe s wynosi

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (n_i - \bar{n})^2} = \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (n_i - 44,1)^2} = 18,3 \text{ mln.}$$

Granice przedziału ufności, określone przez wzory (5.14), wynoszą więc

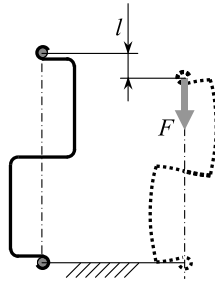
$$\begin{aligned} n_d &= 44,1 - 2,26 \cdot \frac{18,3}{\sqrt{10-1}} \approx 31 \text{ mln,} \\ n_g &= 44,1 + 2,26 \cdot \frac{18,3}{\sqrt{10-1}} \approx 58 \text{ mln.} \end{aligned}$$

Wartość oczekiwana En trwałości zmęczeniowej projektowanych podłużnic jest zatem zawarta w przedziale $(3,1 \div 5,8) \cdot 10^7$ zmian naprężeń z prawdopodobieństwem $\beta = 0,95$.

PRZYKŁAD 5.4

W celu doświadczalnego określenia współczynnika sztywności pewnej sprężyny (rys. 5.3), produkowanej w dużych seriach, pobrano losowo 6 sprężyn i poddano badaniom ich odkształcenia pod wpływem siły $F = 200 \text{ N}$, jednakowej dla

wszystkich sztuk. Wyniki pomiarów odkształcenia każdej z tych sprężyn są zamieszczone w tabeli 5.4. Należy wyznaczyć wartość oczekiwaną EI odkształcenia sprężyny oraz przedział, w którym ona się znajduje w populacji generalnej produkowanych sprężyn. Przyjąć poziom ufności $\beta = 0,90$.



Rys. 5.3. Odkształcenie sprężyny esowej pod wpływem siły F

Tabela 5.4. Wyniki pomiarów odkształceń sprężyn esowych

l_i [mm]	5,7	5,9	5,5	5,6	5,8	5,7
------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Rozwiązanie

Estymatorem punktowym wartości oczekiwanej EI odkształcenia sprężyny jest średnia z wyników pomiarów. Zgodnie ze wzorem (5.1) wynosi ona

$$\bar{l} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N l_i = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 l_i = 5,7 \text{ mm.}$$

Przyjmujemy, że przedział, w którym znajduje się wartość EI w populacji generalnej produkowanych sprężyn, pokrywa się z przedziałem ufności. Ponieważ liczebność próbki losowej jest niewielka ($N = 6$), to do wyznaczenia granic przedziału ufności zastosujemy wzory (5.7) wynikające z rozkładu t Studenta. W rozważanym przypadku przybierają one postać:

$$\begin{aligned} l_d &= \bar{l} - t_{N-1, (1+\beta)/2} \frac{s}{\sqrt{N-1}}, \\ l_g &= \bar{l} + t_{N-1, (1+\beta)/2} \frac{s}{\sqrt{N-1}}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

gdzie: $t_{N-1, (1+\beta)/2}$ – kwantyl rozkładu t Studenta o $(N - 1)$ stopniach swobody zmiennej losowej t , s – empiryczne odchylenie standardowe zmiennej losowej \hat{l} . Zalecony poziom ufności wynosi $\beta = 0,90$. Podobnie, jak w poprzednich przykładach, wartości kwantyla $t_{k, \alpha} = t_{N-1, (1+\beta)/2} = t_{5; 0,95}$ znajdujemy w tabeli umieszczonej w Załączniku 2. Wynosi on $t_{5; 0,95} = 2,02$.

Występujące we wzorach (5.15) empiryczne odchylenie standardowe s wynosi

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (l_i - \bar{l})^2} = \sqrt{\frac{1}{5} \sum_{i=1}^6 (l_i - 5,7)^2} = 0,14 \text{ mm}.$$

Po podstawieniu tej i pozostałych wartości do wzorów (5.15) otrzymujemy

$$l_d = 5,7 - 2,02 \cdot \frac{0,14}{\sqrt{6-1}} = 5,7 - 0,126 \approx 5,57 \text{ mm},$$

$$l_g = 5,7 + 2,02 \cdot \frac{0,14}{\sqrt{6-1}} = 5,7 + 0,126 \approx 5,83 \text{ mm}.$$

Sprawdźmy dodatkowo, ile wynoszą te granice przy zastosowaniu do ich wyznaczenia wzorów (5.9), pozwalających na dobre oszacowania w przypadku, gdy N jest duże, czyli raczej nie w przypadku rozważanym. W odniesieniu do badanego odkształcenia sprężyny mają one postać:

$$\begin{aligned} l_d &= \bar{l} - y_{(1+\beta)/2} \frac{s}{\sqrt{N}}, \\ l_g &= \bar{l} + y_{(1+\beta)/2} \frac{s}{\sqrt{N}}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

W odpowiednich tabelach znajdujemy kwantyl rzędu $\alpha = (1 + \beta)/2$ standaryzowanego rozkładu normalnego. Wynosi on $y_{(1+\beta)/2} = y_{0,95} = 1,645$. Po podstawieniu danych do wzorów (5.16) otrzymujemy

$$l_d = 5,7 - 1,645 \cdot \frac{0,13}{\sqrt{6}} = 5,7 - 0,087 \approx 5,61 \text{ mm},$$

$$l_g = 5,7 + 1,645 \cdot \frac{0,13}{\sqrt{6}} = 5,7 + 0,087 \approx 5,79 \text{ mm}.$$

Przedział ufności wyznaczony przy użyciu dokładniejszych wzorów, czyli wzorów (5.15), jest więc nieco szerszy od wyznaczonego za pomocą wzorów (5.16).

PRZYKŁAD 5.5

W pewnej firmie była przeprowadzana kontrola wyrywkowa wymiarów wałka przekładni, ważnych ze względu na montaż i współpracę z innymi elementami przekładni. Kontrola polegała na pobieraniu co określony czas partii wałków o jednakowej liczbie wynoszącej 10 sztuk, dokonywaniu pomiaru ważnych wymiarów i wyznaczaniu średniej wadliwości w wałków w każdej z partii (tab. 5.5). Liczba takich partii skontrolowanych w ciągu miesiąca wyniosła $N = 20$. Zakładając, że proces produkcji wałków jest stabilny, należy oszacować wartość ocze-

kiwaną Ew wadliwości w produkowanych przez firmę wałków, w tym – granice przedziału ufności tej wielkości przy założeniu poziomym ufności $\beta = 0,90$.

Tabela 5.5. Średnie wadliwości 20 skontrolowanych partii wałków

w_i	0,1	0	0	0	0	0	0,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,1	0	0	0
-------	-----	---	---	---	---	---	-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----	---	---	---

Rozwiązanie

Estymatorem punktowym wartości oczekiwanej Ew wadliwości jest średnia z wyników pomiarów. Zgodnie ze wzorem (5.1) wynosi ona

$$\bar{w} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} w_i = 0,015, \text{ czyli } 1,5\%.$$

Przyjmijmy, że liczebność dokonanych kontroli wadliwości $N = 20$ jest dostatecznie duża do tego, by to na mocy centralnego twierdzenia granicznego traktować rozkład takiego estymatora, jak średnia \bar{w} , jako w przybliżeniu normalny i wówczas (zgodnie ze wzorami (5.9))

$$\begin{aligned} w_d &= \bar{w} - y_\alpha \frac{s}{\sqrt{N}}, \\ w_g &= \bar{w} + y_\alpha \frac{s}{\sqrt{N}}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Kwantyl y_α rzędu $\alpha = (1 + \beta)/2$ standaryzowanego rozkładu normalnego wynosi w tym przypadku $y_{(1+\beta)/2} = y_{0,95} = 1,645$ (Załącznik 1), a empiryczne odchylenie standardowe zmiennej losowej \hat{w} , wyznaczone przy użyciu wzoru (5.2),

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (w_i - \bar{w})^2} = \sqrt{\frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (w_i - \bar{w})^2} = 0,0366.$$

Po podstawieniu danych do wzorów (5.17) otrzymujemy

$$\begin{aligned} w_d &= 0,015 - 1,645 \cdot \frac{0,0366}{\sqrt{20}} = 0,015 - 0,013 \approx 0,002, \\ w_g &= 0,015 + 1,645 \cdot \frac{0,0366}{\sqrt{20}} = 0,015 + 0,013 \approx 0,028. \end{aligned}$$

Zatem wartość oczekiwana Ew wadliwości jest zawarta w przedziale $(0,2-2,8)\%$ z prawdopodobieństwem $\beta = 0,90$. Przedział ten jest dość szeroki.

Uwaga: Wielkości y_α i s potrzebne do wyznaczenia granic przedziału ufności w_d i w_g (patrz wzory (5.17)) możemy obliczyć, wykorzystując komendy programu MS Excel, podobnie jak w rozwiązaniu przykładu 5.1, z tą różnicą, że wartość kwantyla y_α wyznaczamy z rozkładu normalnego przy użyciu komendy ROZKŁAD.NORMALNY.S.ODW dla prawdopodobieństwa $\alpha = (1 + \beta)/2$.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

Zadanie 5.1

W wyniku doświadczalnych badań trwałości pokładowego układu sterowania samolotu bezzałogowego, przeprowadzanych na próbie losowej o liczebności $N = 12$ egzemplarzy tego układu, uzyskano realizacje tej zmiennej losowej podane w tabeli 5.6. Stosując estymację punktową i estymację przedziałową, należy oszacować wartość oczekiwaną ET trwałości układu sterowania.

Tabela 5.6. Wyniki badań trwałości pokładowego układu sterowania samolotu bezzałogowego

T [h]	750	3820	260	1890	2055	1210	2768	2747	1745	3760	920	1545
---------	-----	------	-----	------	------	------	------	------	------	------	-----	------

Zadanie 5.2

W pewnej firmie była przeprowadzana kontrola wyrywkowa wymiaru średnicy wewnętrznej produkowanych pierścieni. Kontrola polegała na pobieraniu co określony czas próbek pierścieni o jednakowej liczebności wynoszącej 50 sztuk i dokonywaniu pomiaru średnicy. Liczba takich próbek skontrolowanych w ciągu tygodnia wyniosła $N = 15$. W każdej ze sprawdzanych próbek notowano liczbę n_i pierścieni o wymiarze średnicy wewnętrznej niemieszczącej się w polu tolerancji (tab. 5.7). Należy oszacować wartość oczekiwaną En liczby wadliwie wykonanych pierścieni w każdej partii liczącej 50 sztuk, w tym – granice przedziału ufności tej wielkości przy założeniu poziomu ufności $\beta = 0,90$.

Tabela 5.7. Liczba pierścieni o wymiarze średnicy wewnętrznej niemieszczącej się w polu tolerancji

n_i	1	0	0	3	0	1	1	2	2	3	0	1	0	1	0
-------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Zadanie 5.3

W celu określenia granicy plastyczności R_e pewnej stali konstrukcyjnej przeprowadzono na maszynie wytrzymałościowej badania $N = 14$ próbek o określonych przez normę wymiarach. W rezultacie uzyskano 14 wartości naprężeń $\sigma \equiv R_e$, przy których zauważano płynięcie materiału próbek. Wartości te są zamieszczone w tabeli 5.8.

Tabela 5.8. Wyniki badań granicy plastyczności R_e

$R_{e,i}$ [MPa]	460	522	610	535	595	510	550	547	592	490	518	502	605	568
-----------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Na podstawie tych wyników badań należy określić granice przedziału ufności wartości oczekiwanej ER_e granicy plastyczności badanej stali przy założeniu poziomu ufności: 1) $\beta = 0,90$, 2) $\beta = 0,95$.

Zadanie 5.4

W przewodzie rurowym za pompą jest umieszczony ciśnieniomierz. Zadaniem tego przyrządu pomiarowego jest mierzenie ciśnienia czynnika tłoczonego przez pompę i sygnalizowanie sytuacji nadmiernego spadku ciśnienia. W losowo wybranych chwilach ciśnienie jest rejestrowane. W tabeli 5.9 są przytoczone wyniki 18 zarejestrowanych pomiarów. Opierając się na tych wynikach i stosując estymację punktową należy oszacować wartość oczekiwaną Ep i odchylenie standardowe σ_p zarejestrowanego ciśnienia.

Tabela 5.9. Zarejestrowane wyniki pomiaru ciśnienia czynnika tłoczonego przez pompę

p_i [MPa]	0,62	0,68	0,63	0,60	0,67	0,69	0,64	0,63	0,66
	0,65	0,64	0,62	0,66	0,61	0,63	0,65	0,62	0,67

Zadanie 5.5

Na średnicę wewnętrzną $d = 50$ mm pierścienia wewnętrznego łożyska tocznego narzucone są odchyłki wymiarowe: dolna $EI = -15 \mu\text{m}$ i górna $ES = 0$. Zapewnienie wymiaru o takich cechach odbywa się na obrabiarce sterowanej numerycznie poprzez odpowiednie ustawienie parametrów jej pracy. W rezultacie pomiaru wspomnianej średnicy, dokonanej na próbce statystycznej pierścieni o niewielkiej liczebności $N = 12$, zostały zarejestrowane odchyłki e_i średnicy od jej wartości nominalnej $d = 50$ mm. Odchyłki te są zamieszczone w tabeli 5.10.

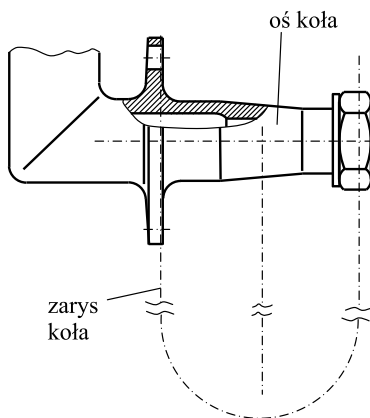
Tabela 5.10. Odchyłki średnicy wewnętrznej pierścienia łożyska od wymiaru nominalnego $d = 50$ mm

e_i [μm]	-5	+1	-7	-9	-11	0	-6	-8	-10	-7	-13	-9
-------------------------	----	----	----	----	-----	---	----	----	-----	----	-----	----

Na podstawie tych wyników badań należy określić granice przedziału ufności wartości oczekiwanej Ee odchyłki mierzonej średnicy przy założeniu poziomu ufności: 1) $\beta = 0,90$, 2) $\beta = 0,95$.

Zadanie 5.6

Oś koła podwozia samolotu (rys. 5.4) poddana została programowanym badaniom zmęczeniowym, trwającym aż do jej pęknięcia zmęczeniowego. Trwałość zmęczeniowa osi jest określona liczbą cykli lądowań, a każdy z nich jest odwzorowywany w badaniach w postaci widma zmiennych obciążeń, równoważnego pod względem zmęczeniowym widmu rzeczywistemu. W rezultacie przeprowadzenia takich badań na próbce losowej identycznych osi koła podwozia o liczebności $N = 16$ uzyskano 16 realizacji n_i trwałości zmęczeniowej n . Są one zamieszczone w tabeli 5.11.



Rys. 5.4. Oś koła podwozia samolotu

Tabela 5.11. Wyniki badań trwałości zmęczeniowej osi koła podwozia samolotu

n_i [tysiący lądowań]	27	23	76	54	12	53	39	18	62	46	59	41	32	71	49	57
-------------------------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Stosując estymację punktową i estymację przedziałową, należy oszacować wartość oczekiwaną En trwałości zmęczeniowej osi koła podwozia samolotu.

Zadanie 5.7

W pewnej firmie była przeprowadzana kontrola wyrwykowa wadliwości produkowanych elementów. Kontrola polegała na pobieraniu co określony czas partii elementów o jednakowej liczebności, dokonywaniu pomiaru ważnych wymiarów i wyznaczaniu średniej wadliwości w wałków w każdej z partii (tab. 5.12). Liczba takich partii skontrolowanych w ciągu miesiąca wyniosła $N = 20$. Zakładając, że proces produkcji wałków jest stabilny, należy oszacować wartość oczekiwaną Ew wadliwości w elementów produkowanych przez firmę, w tym – granice przedziału ufności tej wielkości przy założeniu poziomem ufności $\beta = 0,90$.

Tabela 5.12. Wadliwości 20 skontrolowanych partii elementów

w_i	0,03	0	0	0,01	0	0	0	0	0	0	0,05	0	0,08	0	0	0	0,01	0	0	0,01
-------	------	---	---	------	---	---	---	---	---	---	------	---	------	---	---	---	------	---	---	------

5.3. ESTYMACJA PRAWDOPODOBIEŃSTWA

W analizach inżynierskich wykorzystuje się nierzadko modele probabilistyczne, czyli operujące pojęciem i wielkością prawdopodobieństwa. Dane potrzebne do takich analiz, w postaci wartości prawdopodobieństw, czerpane są z obserwacji lub badań eksperymentalnych. Jak wspomniano powyżej, dobrym estymatorem prawdopodobieństwa p jest częstość w wyznaczana przy użyciu wzoru (5.4). Wzór ten jest wystarczający, gdy ograniczamy się do estymacji punktowej. Jeśli chcemy mieć więcej informacji o nieznanym prawdopodobieństwie, to wyniki badań eksperymentalnych wykorzystujemy do estymacji przedziałowej.

Gdy liczebność N próbki losowej jest względnie mała, to granice przedziału ufności mogą być wyznaczone przy użyciu wzorów [2]:

$$w_d = \frac{1}{1 + \frac{N-b+1}{b} f_{(1+\beta)/2; 2(N-b+1), 2b}},$$

$$w_g = \frac{f_{(1+\beta)/2; 2(b+1), 2(N-b)}}{\frac{N-b}{b+1} + f_{(1+\beta)/2; 2(b+1), 2(N-b)}},$$
(5.18)

gdzie $f_{\alpha; k_1, k_2}$ to kwantyl rzędu $\alpha = (1 + \beta)/2$ rozkładu F Snedecora o k_1 i k_2 stopniach swobody. Tablice wartości $f_{\alpha; k_1, k_2}$ są podane między innymi w pracy [2] oraz w Załączniku 3. Możemy więc sądzić, że nieznanne prawdopodobieństwo p jest zawarte w przedziale $w_d \leq p \leq w_g$ z prawdopodobieństwem β , czyli

$$P\{w_d \leq p \leq w_g\} = \beta.$$
(5.19)

Przy dużej liczebności badanej próbki losowej, czyli przy dużym N , mogą być stosowane do określenia granic przedziału ufności nieznanego prawdopodobieństwa

stwa p również inne zależności, przy wyprowadzaniu których korzysta się z cechy asymptotycznej normalności rozkładu estymatora \hat{w} . Wówczas granice przedziału ufności, podane w relacji (5.19), można wyznaczać przy użyciu wyrażeń:

$$\begin{aligned}w_d &= w - y_\alpha \sqrt{\frac{1}{N} w(1-w)}, \\w_g &= w + y_\alpha \sqrt{\frac{1}{N} w(1-w)},\end{aligned}\tag{5.20}$$

gdzie: w – częstość wyznaczona przy użyciu wzoru (5.4), y_α – kwantyl rzędu $\alpha = (1 + \beta)/2$ standaryzowanego rozkładu normalnego.

Według autora pracy [2] aproksymacja rozkładu estymatora \hat{w} rozkładem normalnym nie prowadzi do zbyt dużych niedokładności oszacowań prawdopodobieństwa p , jeśli jest spełniony warunek

$$w(1-w)N > 4.\tag{5.21}$$

Oczywiście, ma on charakter umowny.

Jak wynika z wyrażeń (5.7), (5.9), (5.18) i (5.20), bardzo duży wpływ na szerokość przedziałów ufności, a więc i na dokładność statystycznych oszacowań ma liczebność N próbki losowej. Przy dostatecznie dużych wartościach N przedział ten może być na tyle wąski, że wystarczającą informację o badanej wielkości x może zapewnić estymacja punktowa tej wielkości.

Znajomość rozkładu estymatora poszukiwanej wielkości może być podstawą do oceny liczebności próbki losowej w badaniach statystycznych, zapewniającej zadaną dokładność wyników. Tak na przykład, jeśli nieznaną wielkością wyznaczaną w badaniach jest prawdopodobieństwo p , a rozkład jego estymatora \hat{w} jest normalny, to na podstawie wyrażeń (5.19) i (5.20) otrzymuje się wzór określający pożądaną liczebność próbki losowej obiektów w zależności od dopuszczalnej niedokładności bezwzględnej $\varepsilon = |p - w|$. Ma on postać

$$N = \left(\frac{y_\alpha}{\varepsilon} \right)^2 w(1-w).\tag{5.22}$$

PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 5.6

Liczba wypadków drogowych w latach 2013–2017 zaszłych na terenie USA, zanotowana przez Bureau of Transportation Statistics, wyniosła 32 mln. Całkowita liczba pojazdów wynosiła w tym czasie około 265 mln. Należy oszacować na

podstawie tych danych średnie prawdopodobieństwo zajścia wypadku drogowego w USA w przeliczeniu na 1 pojazd w ciągu 1 roku.

Rozwiązanie

Oszacowanie prawdopodobieństwa zajścia wypadku ma znaczenie prognostyczne przy założeniu, że w kilku kolejnych latach bezpieczeństwo na drogach w USA nie ulegnie istotnym zmianom. Dane statystyczne to potwierdzają. Warto także zauważyć, że oszacowanie jest dokonywane nie na próbie losowej, lecz na całej populacji pojazdów. Zatem sens ma jedynie obliczenie uśrednionej (po wszystkich rodzajach pojazdów na drogach USA) częstości występowania wypadków w ciągu 1 roku i potraktowanie jej jako prawdopodobieństwa p zajścia wypadku w następnych latach. Do wyznaczenia tej wielkości użyjemy wzoru (5.4). Zatem

$$p \approx w = \frac{b}{N}, \quad (5.23)$$

gdzie: $N = 265$ mln – liczba pojazdów w USA, $b = (32/5) = 6,4$ mln – liczba wypadków przypadająca na jeden rok z okresu 5 lat (2013–2017). Po podstawieniu danych do wzoru (5.23) otrzymujemy

$$w = \frac{6,4}{265} = 0,024.$$

PRZYKŁAD 5.7

Średnia wartość prawdopodobieństwa utraty życia przez kierowcę ciężarówki w USA w ciągu 1 roku wynosi $185 \cdot 10^{-6}$, a zatrudnionych w tym zawodzie w USA jest około 3,3 mln osób. Oszacuj liczbę kierowców, którzy tracą życie w USA w ciągu 1 roku wykonywania swojego zawodu.

Rozwiązanie

Z treści przykładu wynika, że przytoczone informacje statystyczne dotyczą nie próbki statystycznej, lecz całej populacji kierowców ciężarówek w USA. Podana średnia wartość prawdopodobieństwa utraty życia przez kierowcę ciężarówki należy więc traktować jako częstość zdarzeń utraty życia przez kierowców, a uśrednienie dotyczy wszystkich kierowców ciężarówek, rodzajów ciężarówek, rodzajów i długości tras jazdy, liczby lat, z których pochodzą dane itd. Uznajemy zatem, że podane średnie prawdopodobieństwo q jest równe częstości w , czyli

$$q = w,$$

gdzie

$$w = \frac{b}{N},$$

przy czym: $w = 185 \cdot 10^{-6}$, $N = 3,3$ mln – liczba kierowców ciężarówek (populacja generalna), b – poszukiwana średnia liczba kierowców, którzy tracą życie w USA w ciągu 1 roku wykonywania swojego zawodu. Stąd

$$b = wN = 185 \cdot 10^{-6} \cdot 3,3 \cdot 10^6 \approx 610.$$

PRZYKŁAD 5.8

Badaniom eksploatacyjnym niezawodności poddano próbkę losową reflektorów o liczebności $N = 50$, a następnie drugą próbkę tych samych obiektów o liczebności $N = 500$. W czasie t ich użytkowania uległo uszkodzeniom w pierwszej próbce $b = 5$, a w drugiej próbce – $b = 50$ egzemplarzy obiektu. Należy wyznaczyć wartości estymatora prawdopodobieństwa nieuszkodzenia pojedynczego reflektora w czasie t na podstawie wyników badań pierwszej próbki i na podstawie wyników drugiej próbki, a także granice przedziałów ufności tej miary niezawodności na poziomie ufności $\beta = 0,95$ w obu przypadkach badań.

Rozwiązanie

Za miarę niezawodności reflektora przyjmijmy prawdopodobieństwo R jego nieuszkodzenia w analizowanym czasie t użytkowania. Zatem estymatorem \hat{R} tej wielkości jest częstość niewystępowania uszkodzenia w badaniach próbki losowej reflektorów. Zgodnie ze wzorem (5.4) częstość ta określona na podstawie rezultatu badań jednej i drugiej próbki wynosi:

$$\hat{R} = w = \frac{50 - 5}{50} = 0,90,$$

$$\hat{R} = w = \frac{500 - 50}{500} = 0,90,$$

a więc jednakowa w obu badaniach.

Granice przedziałów ufności dla nieznaney wartości funkcji niezawodności R wyznaczmy na podstawie wyrażeń (5.20), a więc przy założeniu, że próbki są wystarczająco duże, by rozkład estymatora \hat{R} przyjąć za normalny. W takim przypadku granice te wynoszą:

$$R_d = w - y_\alpha \sqrt{\frac{1}{N} w(1-w)},$$

$$R_g = w + y_\alpha \sqrt{\frac{1}{N} w(1-w)},$$

gdzie y_α jest kwantylem rzędu $\alpha = (1 + \beta)/2$ standaryzowanego rozkładu normalnego. Wartość tego kwantyla znajdujemy na przykład w tabeli zamieszczonej w Załączniku 1. Jeśli poziom ufności $\beta = 0,95$, to $y_{(1+\beta)/2} = y_{0,975} = 1,960$.

Na podstawie wyników badań pierwszej próbki statystycznej reflektorów otrzymujemy granice przedziału ufności:

$$R_d = 0,90 - 1,960 \cdot \sqrt{\frac{1}{50} \cdot 0,90(1 - 0,90)} = 0,90 - 0,083 = 0,817,$$

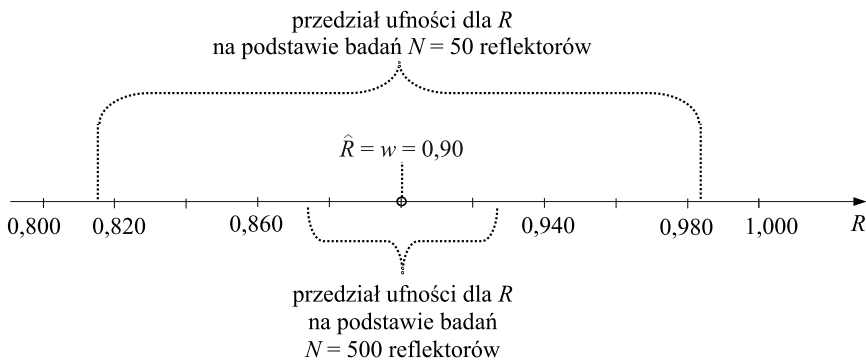
$$R_g = 0,90 + 1,960 \cdot \sqrt{\frac{1}{50} \cdot 0,90(1 - 0,90)} = 0,90 + 0,083 = 0,983,$$

a na podstawie wyników badań drugiej próbki granice te wynoszą:

$$R_d = 0,90 - 1,960 \cdot \sqrt{\frac{1}{500} \cdot 0,90(1 - 0,90)} = 0,90 - 0,026 = 0,874,$$

$$R_g = 0,90 + 1,960 \cdot \sqrt{\frac{1}{500} \cdot 0,90(1 - 0,90)} = 0,90 + 0,026 = 0,926.$$

Dziesięciokrotne zwiększenie liczebności próbki spowodowało przeszło trzykrotne zmniejszenie szerokości przedziału ufności, a tym samym dokładności oszacowania wartości R . Uzyskane wyniki są także zilustrowane na rysunku 5.5.



Rys. 5.5. Przedziały ufności dla funkcji niezawodności R reflektora uzyskane na podstawie badań próbek losowych o różnych liczebnościach

PRZYKŁAD 5.9

W celu określenia niezawodności pewnego typu prędkościomierza przeprowadzono badania doświadczalne 20 jego egzemplarzy trwające 1000 h. W tym czasie uszkodziły się 3 z nich. Stosując estymację punktową i estymację prze-

działową, należy oszacować prawdopodobieństwo q uszkodzenia pojedynczego egzemplarza z populacji prędkościomierzy w okresie jego funkcjonowania przez 1000 h.

Rozwiązanie

Poszukiwane prawdopodobieństwo q oszacujemy na podstawie uzyskanych wyników badań trwałości prędkościomierzy, stosując estymator w postaci częstości (5.4)

$$w = \frac{b}{N}.$$

W opisanych badaniach liczebność próbki losowej wynosiła $N = 20$, a liczba uszkodzonych prędkościomierzy spośród badanych N w czasie 1000 godzin – $b = 3$. Zatem

$$q \approx w = \frac{3}{20} = 0,15.$$

Jest to wynik estymacji punktowej prawdopodobieństwa q .

W celu zastosowania estymacji przedziałowej sprawdzimy najpierw, czy spełniony jest warunek (5.21) potwierdzający dobrą zbieżność rozkładu prawdopodobieństwa estymatora \hat{w} do rozkładu normalnego. Lewa strona tego warunku

$$w(1-w)N = 0,15(1-0,15) \cdot 20 = 2,55.$$

Jest więc zbyt mała, by dokładność oszacowania przedziału ufności dla poszukiwanego prawdopodobieństwa q na podstawie wzorów (5.20) była wystarczająca. Zatem do wyznaczenia granic przedziału ufności zastosujemy dokładniejsze wzory, czyli (5.18). Przyjmijmy też, że poziom ufności wynosi $\beta = 0,90$.

Wcześniej, w odpowiednich tabelach, wyszukamy wartości kwantyli rozkładu F Snedecora występujących we wzorach (5.18):

- $f_{(1+\beta)/2; 2(N-b+1), 2b} = f_{0,95; 36, 6}$ rzędu 0,95 o $k_1 = 36$ i $k_2 = 6$ stopniach swobody,
- $f_{(1+\beta)/2; 2(b+1), 2(N-b)} = f_{0,95; 8, 34}$ rzędu 0,95 o $k_1 = 8$ i $k_2 = 34$ stopniach swobody.

Z tabeli zamieszczonej w Załączniku 3 wynotowujemy wartości: $f_{0,95; 36, 6} = 3,79$ i $f_{0,95; 8, 34} = 2,24$. Po podstawieniu tych wartości i innych danych do wzorów (5.18) otrzymujemy

$$w_d = \frac{1}{1 + \frac{N-b+1}{b} f_{(1+\beta)/2; 2(N-b+1), 2b}} = \frac{1}{1 + \frac{20-3+1}{3} \cdot 3,79} = 0,042,$$

$$w_g = \frac{f_{(1+\beta)/2; 2(b+1), 2(N-b)}}{\frac{N-b}{b+1} + f_{(1+\beta)/2; 2(b+1), 2(N-b)}} = \frac{2,24}{\frac{20-3}{3+1} + 2,24} = 0,345.$$

Zatem poszukiwane prawdopodobieństwo q jest zawarte w przedziale (ufności) $0,04 \leq q \leq 0,35$ z prawdopodobieństwem $\beta = 0,90$, czyli

$$P\{0,04 \leq q \leq 0,35\} = 0,90.$$

Wyznamy wartości granic przedziału ufności również w inny sposób, przyjmując, że rozkład estymatora nieznanego prawdopodobieństwa q jest normalny (choć warunek dopuszczalności takiego założenia nie jest, jak wykazano powyżej, spełniony). Do wyznaczenia granic przedziału ufności zastosujemy więc wyrażenia (5.20). Występujący w nich kwantyl $y_{(1+\beta)/2} = y_{0,95}$ rzędu 0,95 standaryzowanego rozkładu normalnego znajdujemy w tabelach tego rozkładu (np. w tabeli zamieszczonej w Załączniku 1) lub w tabelach funkcji Laplace'a, podanych na przykład w pracach [2, 5]. Wynosi on $y_{0,95} = 1,645$. Po podstawieniu tej wartości i innych danych do wzorów (5.20) otrzymujemy

$$w_d = w - y_\alpha \sqrt{\frac{1}{N} w(1-w)} = 0,15 - 1,645 \sqrt{\frac{1}{20} 0,15(1-0,15)} = 0,019,$$

$$w_g = w + y_\alpha \sqrt{\frac{1}{N} w(1-w)} = 0,15 + 1,645 \sqrt{\frac{1}{20} 0,15(1-0,15)} = 0,281.$$

Jak widać, rezultaty uzyskane przy użyciu tych przybliżonych wzorów niewiele odbiegają od uzyskanych z dokładniejszych zależności wynikających z rozkładu F Snedecora.

PRZYKŁAD 5.10

Na podstawie danych statystycznych rejestrowanych przez 2 lata użytkowania 300 egzemplarzy pewnego urządzenia lotniczego zanotowano 7 uszkodzeń. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo wystąpienia uszkodzenia pojedynczego egzemplarza urządzenia w ciągu 1 roku jego funkcjonowania.

Rozwiązanie

Estymatorem nieznanego prawdopodobieństwa q jest częstość, która odniesiona do 1 roku funkcjonowania urządzenia wynosi w przybliżeniu

$$w = \frac{b}{N},$$

gdzie: $N = 300$ – liczebność próbki (przyjmijmy, że jest to próbka losowa z populacji generalnej analizowanych urządzeń), $b \approx 7/2$ – liczba egzemplarzy urządzeń, które w ciągu 1 roku ich użytkowania uległy uszkodzeniu.

Po podstawieniu danych otrzymujemy oszacowanie (punktowe) prawdopodobieństwa q

$$q \approx w = \frac{7}{300 \cdot 2} = 0,0117.$$

Wyznamy jeszcze przedział ufności, w którym może się znajdować prawdopodobieństwo q uszkodzenia urządzenia. Chociaż warunek (5.21) nie jest spełniony, co można łatwo sprawdzić, do wyznaczenia granic przedziału ufności zastosujemy wzory przybliżone (5.20), oparte na założeniu, że zmienna losowa w ma rozkład normalny. Aby z nich skorzystać, znajdziemy wcześniej wartość kwantyla rzędu $\alpha = (1 + \beta)/2$ standaryzowanego rozkładu normalnego. Przyjmijmy w tym celu poziom ufności $\beta = 0,90$. Wówczas $y_\alpha = y_{(1+\beta)/2} = y_{0,95} = 1,645$ (Załącznik 1). Granice przedziału ufności wynoszą więc:

$$w_d = w - y_\alpha \sqrt{\frac{1}{N} w(1-w)} = 0,0117 - 1,645 \sqrt{\frac{1}{300} \cdot 0,0117(1-0,0117)} = 0,0015,$$

$$w_g = w + y_\alpha \sqrt{\frac{1}{N} w(1-w)} = 0,0117 + 1,645 \sqrt{\frac{1}{300} \cdot 0,0117(1-0,0117)} = 0,0219.$$

Zatem, poszukiwane prawdopodobieństwo wystąpienia uszkodzenia pojedynczego egzemplarza urządzenia w ciągu 1 roku jego funkcjonowania jest zawarte w przedziale ufności $0,0015 \leq q \leq 0,0219$ z prawdopodobieństwem $\beta = 0,90$ (czyli na poziomie ufności $\beta = 0,90$).

Sprawdźmy dodatkowo, ile wynoszą granice przedziału ufności wyznaczone przy użyciu dokładniejszych wzorów (5.18), których podstawą jest rozkład F Snedecora zmiennej w . Występujące w tych wzorach kwantyle rozkładu, tj.:

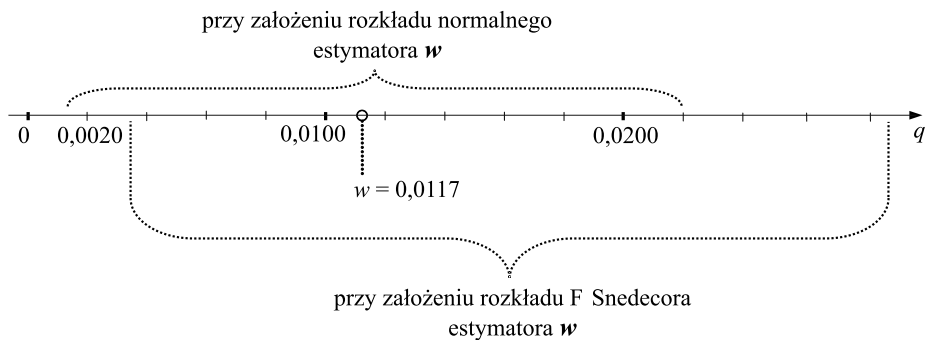
- $f_{(1+\beta)/2; 2(N-b+1), 2b} = f_{0,95; 595, 7}$ rzędu 0,95 o $k_1 = 595$ i $k_2 = 7$ stopniach swobody,
- $f_{(1+\beta)/2; 2(b+1), 2(N-b)} = f_{0,95; 9, 593}$ rzędu 0,95 o $k_1 = 9$ i $k_2 = 593$ stopniach swobody,

wynotowujemy z tabeli zamieszczonej na przykład w Załączniku 3. Wynoszą one: $f_{0,95; 595, 7} = 3,23$ i $f_{0,95; 9, 593} = 1,89$. Po podstawieniu tych wartości i innych danych do wzorów (5.18) otrzymujemy

$$w_d = \frac{1}{1 + \frac{N-b+1}{b} f_{(1+\beta)/2; 2(N-b+1), 2b}} = \frac{1}{1 + \frac{300-7/2+1}{7/2} \cdot 3,23} = 0,0036,$$

$$w_g = \frac{f_{(1+\beta)/2; 2(b+1), 2(N-b)}}{\frac{N-b}{b+1} + f_{(1+\beta)/2; 2(b+1), 2(N-b)}} = \frac{1,89}{\frac{300-7/2}{7/2+1} + 1,89} = 0,0287.$$

Wyniki uzyskane obydwoma sposobami są zobrazowane na rysunku 5.6.



Rys. 5.6. Przedziały ufności dla prawdopodobieństwa q wystąpienia uszkodzenia urządzenia, uzyskane dwoma sposobami

PRZYKŁAD 5.11

Pewna firma przeprowadzająca badania poparcia przez wyborców poszczególnych partii ustaliła liczebność próbki statystycznej osób ankietowanych na $N = 1000$. Należy wyznaczyć i przedstawić graficznie zależność:

- prawdopodobieństwa p poparcia partii w wyborach,
- dokładność oszacowania tego prawdopodobieństwa, od rezultatu badań sondażowych.

Rozwiązanie

Estymatorem prawdopodobieństwa p przyjmujemy częstość w poparcia partii w badaniach sondażowych, zdefiniowaną przez wzór (5.4). W ramach estymacji punktowej przyjmujemy więc, że zależność prawdopodobieństwa p od wyników badań sondażowych ma postać

$$p = w.$$

Dokładność oszacowania prawdopodobieństwa p określimy na podstawie szerokości przedziału ufności $[w_d, w_g]$. Liczebność N próbki jest względnie duża, można więc się spodziewać, że estymator \hat{w} ma rozkład zbliżony do normalnego. Warunek (5.21) dopuszczalności takiego założenia jest spełniony nawet dla małych wartości częstości w , na przykład dla $w = 3\% = 0,03$ lewa jego strona wynosi

$$w(1-w)N = 0,03(1-0,03) \cdot 1000 = 29,1$$

i jest dużo większa niż 4. Zatem do wyznaczenia szerokości przedziału ufności zastosujemy wzory (5.20). Wynika z nich, że jest on rozłożony symetrycznie względem częstości w i że jego szerokość wynosi

$$\Delta = 2y_{\alpha}\sqrt{\frac{1}{N}w(1-w)}, \quad (5.24)$$

gdzie y_{α} to kwantyl rzędu $\alpha = (1 + \beta)/2$ standaryzowanego rozkładu normalnego. Przyjmijmy dwa poziomy ufności, dla których wyznaczmy szerokość Δ : $\beta = 0,95$ i $\beta = 0,99$. Wartości kwantyli znajdujemy na przykład w tabelach zamieszczonych w pracach [2, 5] lub w Załączniku 1. Wynoszą one:

- dla $\beta = 0,95 - y_{(1+\beta)/2} = y_{0,975} = 1,960$,
- dla $\beta = 0,99 - y_{(1+\beta)/2} = y_{0,995} = 2,575$.

Po podstawieniu danych do wzoru (5.24) otrzymujemy – przy poziomie $\beta = 0,95$

$$\Delta = 2 \cdot 1,960 \sqrt{\frac{1}{1000}w(1-w)} = 0,1240 \sqrt{w(1-w)},$$

a przy poziomie $\beta = 0,99$

$$\Delta = 2 \cdot 2,575 \sqrt{\frac{1}{1000}w(1-w)} = 0,1629 \sqrt{w(1-w)}.$$

Korzystając z tych wyrażeń, obliczamy wielkość Δ dla wybranych wartości w w przedziale między 0,03 a 0,50. Wyniki obliczeń zamieszczone są w tabeli 5.13.

Na podstawie obliczeń można przyjąć, że prawdopodobieństwo p poparcia partii w wyborach powinno się zmieścić z prawdopodobieństwem β w przedziale

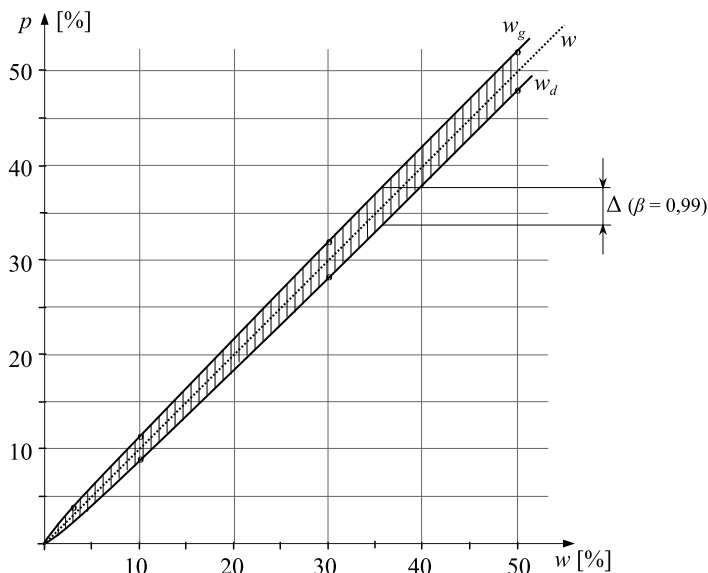
$$p = w \pm \delta,$$

gdzie $\delta = 0,5\Delta$ (z racji symetrii rozkładu normalnego).

Tabela 5.13. Wyniki obliczeń szerokości przedziału ufności

w [%]		3	10	30	50
$\beta = 0,95$	Δ [%]	2,12	3,72	5,68	6,2
	δ [%]	~ 1	$\sim 1,9$	$\sim 2,8$	$\sim 3,1$
$\beta = 0,99$	Δ [%]	2,79	4,89	7,46	8,15
	δ [%]	$\sim 1,4$	$\sim 2,4$	$\sim 3,7$	$\sim 4,1$

Rezultaty estymacji punktowej i estymacji przedziałowej (dla przypadku, gdy poziom ufności $\beta = 0,99$) prawdopodobieństwa p poparcia partii w zależności od poziomu w poparcia uzyskanego przez partię w badaniu sondażowym są przedstawione na rysunku 5.7.

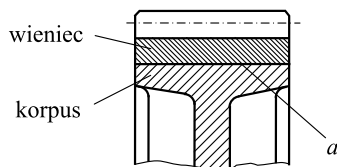


Rys. 5.7. Prognoza wyniku p partii w wyborach dokonywana na podstawie rezultatu w uzyskanego w badaniu sondażowym (z przedziałem ufności na poziomie $\beta = 0,99$)

Z rezultatów obliczeń i z rysunku 5.7 wynika, że dokładność badań sondażowych nawet na tak wysokim poziomie ufności, jak określony przez prawdopodobieństwo $\beta = 0,99$, jest duża. Jeśli więc próbka losowa osób ankietowanych jest reprezentatywna dla całej populacji wyborców, to wynik wyborów powinien znaleźć się w przedziale ufności określonym dla oszacowanej w badaniach częstości w . Mówiąc inaczej, prawdopodobieństwo, że wynik będzie się znajdował poza tym przedziałem jest znikome.

PRZYKŁAD 5.12

W czasie uruchamiania urządzenia występują szczególnie duże obciążenia poszczególnych jego elementów. Jednym z nich jest koło zębate utworzone w rezultacie połączenia ciernego wieńca i korpusu koła na powierzchni walcowej a (rys. 5.8). Przewidywana wartość prawdopodobieństwa uszkodzenia połączenia wskutek poślizgu na tej powierzchni w rezultacie wielokrotnych włączeń urządzenia podczas t lat jego funkcjonowania wynosi $q \approx 0,05$. W celu potwierdzenia tego przypuszczenia postanowiono przeprowadzić przyspieszone badania zawodności połączenia ciernego poprzez wielokrotne obciążanie egzemplarzy kół na stanowisku badawczym. Zadbano przy tym o wierne odtworzenie rodzaju i wielkości obciążenia oraz ich liczby. Należy określić orientacyjną liczbę egzemplarzy kół zębatach, które powinny się poddać takim badaniom, aby bezwzględna wartość błędu wyniku nie przekroczyła $\varepsilon = 0,01$ z prawdopodobieństwem $\beta = 0,90$.



Rys. 5.8. Połączenie ciernie wienca koła zębatego z korpusem koła

Rozwiązanie

Poszukiwaną liczebność N próbki kół zębatych przeznaczonych do badań doświadczalnych określimy, posługując się przybliżoną zależnością (5.22). W rozważanym przykładzie liczebność ta wynosi

$$N = \left(\frac{y_\alpha}{\varepsilon} \right)^2 q(1-q). \quad (5.25)$$

Występujący w tym wzorze kwantyl y_α rzędu $\alpha = (1 + \beta)/2$ standaryzowanego rozkładu normalnego wynosi $y_{(1+\beta)/2} = y_{(1+0,90)/2} = y_{0,95} = 1,645$ (Załącznik 1). Po podstawieniu tej wartości i pozostałych danych do wzoru (5.25) otrzymujemy

$$N = \left(\frac{1,645}{0,01} \right)^2 \cdot 0,05(1-0,05) \approx 1285.$$

Liczebność próbki jest więc duża, co potwierdza słusność użycia wzoru (5.22) do jej oszacowania. Jest ona na tyle duża, że ze względów finansowych takie badania nie byłyby raczej uzasadnione.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

Zadanie 5.8

W pewnym dużym przedsiębiorstwie produkcyjnym rejestrowano przez 8 lat wypadki zachodzące w dwóch różniących się grupach stanowisk pracy o liczebnościach odpowiednio 100 i 60. W pierwszej z nich zanotowano w tym czasie 6 wypadków, a w drugiej – 3. Wyznacz estymator punktowy prawdopodobieństwa zajścia wypadku w ciągu 1 roku na pojedynczym stanowisku pracy w jednej i w drugiej grupie.

Zadanie 5.9

Pośród jednego tysiąca pracowników, wykonujących wykopy pod rury wodociągowe, zginęło w ciągu trzech lat pracy czterech, a siedemnastu doznało ciężkich obrażeń. Stosując estymację punktową i estymację przedziałową, należy oszacować prawdopodobieństwo:

- utraty zdrowia w stopniu co najmniej ciężkim,
- utraty życia

przez osobę wykonującą tego rodzaju pracę w ciągu 1 roku.

Zadanie 5.10

W reprezentatywnej próbie losowej pracowników w USA, liczącej $N = 1$ mln osób, zanotowano w ciągu 1 roku $b = 57\,000$ wypadków przy pracy (zdarzenia kończące się obrażeniami dowolnego rozmiaru), spowodowanych błędami pracowników. Należy wyznaczyć granice przedziałów ufności dla średniego prawdopodobieństwa Q popełnienia takiego błędu przez pracownika w USA w ciągu 1 roku. Przyjąć poziom ufności $\beta = 0,95$.

Zadanie 5.11

We wszystkich przedsiębiorstwach pewnej spółki zarejestrowano w ciągu $t = 8$ lat $b = 13$ wypadków wskutek potknięcia lub poślizgnięcia podczas poruszania się po terenie przedsiębiorstwa, zakończonych co najmniej średnimi obrażeniami. Pracowników wykonujących podobne zadania i narażonych na takie upadki jest w tej spółce $N = 120$. Stosując estymację punktową i estymację przedziałową, należy oszacować prawdopodobieństwo Q zajścia upadku pracownika spółki wskutek potknięcia lub poślizgnięcia w ciągu 1 roku, zakończonego co najmniej średnimi obrażeniami.

Zadanie 5.12

Na próbie statystycznej wyborców o liczebności $N = 1000$ przeprowadzono badania poparcia poszczególnych partii. Okazało się, że partię XYZ poparło 65 wyborców. Na podstawie takiego rezultatu badania sondażowego należy oszacować:

- prawdopodobieństwo p [%] poparcia tej partii w wyborach,
- dokładność oszacowania tego prawdopodobieństwa, przyjmując poziom ufności $\beta = 0,95$.

Zadanie 5.13

Na średnicę wewnętrzną $d = 50$ mm pierścienia wewnętrznego łożyska tocznego narzucone są odchyłki wymiarowe: dolna $EI = -15\ \mu\text{m}$ i górna $ES = 0$. Zapewnienie wymiaru o takich cechach odbywa się na obrabiarce sterowanej numerycznie poprzez odpowiednie ustawienie parametrów jej pracy. W rezultacie kontroli wymiarów dokonanej na próbie statystycznej pierścieni o liczebności $N = 200$ stwierdzono, że 11 z nich ma wymiary niemieszczące się w polu tolerancji. Należy oszacować wadliwość pierścieni wytwarzanych przy tak ustawionych parametrach obrabiarci oraz dokładność tego oszacowania.

Zadanie 5.14

Zbiorniki ciśnieniowe mają być wykonywane z blachy stalowej przeznaczonej do tego celu. Producent zbiorników postanowił sprawdzić, czy dostarczana przez hutę blacha ma wymaganą granicę wytrzymałości doraźnej wynoszącą co najmniej $R_m = 570$ MPa, gwarantowaną przez hutę z prawdopodobieństwem 96%. W rezultacie badań $N = 80$ próbek wykonanych z blachy okazało się, że 2 z tych próbek miały granicę R_m mniejszą niż wymagana. Należy oszacować granice przedziału ufności dla prawdopodobieństwa tego, że dostarczana przez hutę blacha ma wymaganą granicę wytrzymałości doraźnej. Przyjąć poziom ufności $\beta = 0,95$.

Zadanie 5.15

W przewodzie rurowym za pompą jest umieszczony ciśnieniomierz. Zadaniem tego przyrządu pomiarowego jest mierzenie ciśnienia czynnika tłoczonego przez pompę i sygnalizowanie sytuacji nadmiernego spadku ciśnienia. W losowo wybranych chwilach ciśnienie jest rejestrowane. W tabeli 5.14 są przytoczone wyniki 18 zarejestrowanych pomiarów. Zakładając, że zmiany ciśnienia są procesem stacjonarnym, oraz stosując estymację punktową i estymację przedziałową należy oszacować na podstawie wyników pomiarów prawdopodobieństwo q spadku ciśnienia poniżej $p = 0,62$ MPa. Przyjąć poziom ufności $\beta = 0,90$.

Tabela 5.14. Zarejestrowane wyniki pomiaru ciśnienia czynnika tłoczonego przez pompę

p_i [MPa]	0,62	0,68	0,63	0,60	0,67	0,69	0,64	0,63	0,66
	0,65	0,64	0,62	0,66	0,61	0,63	0,65	0,61	0,67

Zadanie 5.16

Liczba ofiar śmiertelnych wypadków drogowych w latach 2013–2017 zaszłych na terenie USA, zanotowana przez Bureau of Transportation Statistics, wyniosła 175 tys. Całkowita liczba pojazdów wynosiła w tym czasie około 265 mln. Należy oszacować na podstawie tych danych średnie prawdopodobieństwo zajścia wypadku drogowego w USA w przeliczeniu na 1 pojazd w ciągu 1 roku (jako prognozę na kolejne lata), przy założeniu, że w jednym wypadku ze skutkiem śmiertelnym ginie średnio 1,2 osoby.

Zadanie 5.17

Liczba wypadków drogowych w 2017 roku zaszłych na terenie USA, zanotowana przez Bureau of Transportation Statistics, wyniosła 7,3 mln. Całkowita liczba pojazdów wynosiła w tym czasie około 268 mln. Należy oszacować na podstawie tych danych średnie prawdopodobieństwo zajścia wypadku drogowego w USA w przeliczeniu na 1 pojazd w ciągu następnego roku (przy założeniu, że bezpieczeństwo w ruchu drogowym w USA pozostanie na niezmienionym poziomie).

5.4. METODY EKSPERCKIE SZACOWANIA PRAWDOPODOBIEŃSTW ZDARZEŃ

Badania eksperymentalne nie zawsze mogą być przeprowadzone. Powodami są najczęściej: zbyt duże koszty i czas potrzebny do uzyskania wyników, brak możliwości technicznych, względy etyczne i in. Wyjściem z takiej sytuacji jest pozyskiwanie potrzebnych informacji metodami eksperckimi. W niniejszym podrzdziale są przedstawione tylko dwie, najprostsze metody eksperckie z wielu prezentowanych w bogatej literaturze z tego zakresu. Są to metody: bezpośredniego szacowania i rankingowa. Przedstawimy je w dużym skrócie, głównie w kilku przykładach. Bardziej szczegółowy ich opis można znaleźć na przykład w pracach [1, 6, 7]. Przygotowanie badań tymi metodami, opracowywanie i analizowanie uzyskanych wyników jest w dużym stopniu oparte na podstawach statystyki matematycznej. Główna różnica między wspomnianymi metodami eksperckimi a metodami statystycznymi polega na tym, że wyniki podlegające opracowaniu statystycznemu przy użyciu metody eksperckiej nie pochodzą z badań próbkii egzemplarzy obiektów, lecz są wymyślone, wyobrażone przez grupę ekspertów. To wyobrażenie oparte jest na wiedzy o analizowanej rzeczywistości, doświadczeniu, a zwłaszcza na intuicji eksperta. Opinie ekspertów, np. o prawdopodobieństwie zajścia określonego zdarzenia, mogą być wyrażane w różnej formie

i uzyskiwane na przykład przy użyciu specjalnie przygotowanych ankiet. Opinie powinny być wyrażane niezależnie przez poszczególnych ekspertów. Ekspertów powinno być co najmniej kilku, a im liczba ich jest większa, tym trafność (dokładność) oszacowań może być większa. Bardzo duży wpływ na trafność wyrażanych opinii ma sposób sformułowania poleceń (pytań) i wyjaśnień zawartych w ankiecie. Ekspertami powinny być osoby znające analizowany fragment rzeczywistości i cel badań.

Jak wynika z tych objaśnień dotyczących podstaw metod eksperckich, można je nazwać wirtualnymi metodami statystycznymi.

METODA BEZPOŚREDNIEGO SZACOWANIA

Zgodnie z koncepcją tej metody poszczególni eksperci w wypełnianych ankietach wyrażają swoje opinie na przykład o:

- częstościach występowania zdarzenia A (oczywiście – określonego, np. upadku pracownika podczas jego przemieszczania się albo uszkodzenia układu wypuszczania podwozia w samolocie albo zgonu pieszego wskutek potrącenia przez pojazd),
- liczbie zajęć określonego zdarzenia w analizowanym zbiorze obiektów w przyjętym czasie.

Informacje te eksperci mogą podawać w dowolnej formie, może być ona także zasugerowana w ankiecie kierowanej do eksperta. Opinię wyrażoną przez eksperta można uznać za wirtualny odpowiednik pojedynczego rezultatu rzeczywistego badania statystycznego. Ponieważ opinie ekspertów nie pokrywają się, jako wynik oszacowania przyjmuje się średnią z ich opinii.

Tak na przykład, jeśli celem jest oszacowanie prawdopodobieństwa p zajścia określonego zdarzenia (w przyjętym czasie), to zgodnie z informacjami podanymi w podrozdziale 5.1 przyjmuje się, że

$$p \approx w,$$

przy czym w jest uśrednioną opinią ekspertów o częstości zdarzenia. Średnia częstość wynosi

$$w = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i, \quad (5.26)$$

gdzie: w_i – częstość wynikająca z opinii i -tego eksperta, N – liczba ekspertów. Korzystając na przykład z wyrażenia (5.7), można również na podstawie opinii ekspertów określić przedział ufności, w którym mieści się poszukiwane prawdopodobieństwo $p \approx w$. W praktyce jednak poprzestaje się na estymacji (wirtualnej) punktowej.

PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 5.13

W pewnym przedsiębiorstwie postanowiono oszacować w sposób ekspercki możliwość popełnienia określonego błędu w grupie pracowników wykonujących ważne dla przedsiębiorstwa zadanie. W tym celu utworzono grupę specjalistów, którzy po odpowiednim przeszkoleniu wyrazili w ankietach swoje opinie o możliwości wystąpienia tego błędu. Opinie te w formie częstości są podane w tabeli 5.15. Należy oszacować prawdopodobieństwo popełnienia wspomnianego błędu podczas jednokrotnego wykonania zadania.

Tabela 5.15. Częstości błędu podane przez ekspertów

Numer eksperta	Częstość w_i
1	1 raz w czasie 10 wykonań zadania
2	2 razy w czasie 15 wykonań zadania
3	0 razy w czasie 20 wykonań zadania
4	1 razy w czasie 20 wykonań zadania
5	0 razy w czasie 10 wykonań zadania

Rozwiązanie

Częstości popełnienia błędu podczas jednokrotnego wykonania zadania według poszczególnych ekspertów wynoszą w przybliżeniu:

$$w_1 = \frac{1}{10} = 0,10, \quad w_2 = \frac{2}{15} = 0,13, \quad w_3 = \frac{0}{20} = 0, \quad w_4 = \frac{1}{20} = 0,05, \quad w_5 = \frac{0}{10} = 0.$$

Zgodnie ze wzorem (5.26) średnia częstość wynosi więc

$$w = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 w_i = \frac{1}{5} (0,10 + 0,13 + 0 + 0,05 + 0) = 0,056.$$

Zatem, można przyjąć, że prawdopodobieństwo popełnienia błędu podczas jednokrotnego wykonania zadania wynosi $p \approx w = 0,056$.

PRZYKŁAD 5.14

W fazie lądowania awionetki zdarza się czasami tak zwane twarde lądowanie. Informacja o możliwości zajścia takiego zdarzenia, zdarzenia A , jest ważna w fazie projektowania podwozia. W celu dokonania oszacowania prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia A utworzono grupę 6 ekspertów, którzy w ankietach

odpowiedzieli na pytanie: ile twardych lądowań może wystąpić podczas 1000 lądowań analizowanego typu awionetki? Podane przez nich liczby takich lądowań są zawarte w tabeli 5.16.

Tabela 5.16. Liczba twardych lądowań podana przez ekspertów

Nr eksperta	1	2	3	4	5	6
Liczba n_i twardych lądowań podczas 1000 lądowań	3	1	0	2	1	1

Należy oszacować prawdopodobieństwo $P\{A\}$ zajścia twardego lądowania przypadające na jedno lądowanie.

Rozwiązanie

Przyjmujemy, że poszukiwane prawdopodobieństwo jest w przybliżeniu równe częstości twardych lądowań ($p \approx w$), określonej na podstawie opinii ekspertów o liczbie n twardych lądowań podczas 1000 lądowań. Częstość w wynosi

$$w = \frac{n}{1000}. \quad (5.27)$$

Zgodnie z zasadami metody eksperckiej liczbę n traktujemy jako średnią określoną na podstawie opinii poszczególnych ekspertów. Zatem

$$n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i,$$

gdzie $N = 6$ to liczba ekspertów. Po podstawieniu danych do tego wzoru otrzymujemy

$$n = \frac{1}{6}(3 + 1 + 0 + 2 + 1 + 1) = 1,33.$$

Częstość w wynosi więc

$$w = \frac{n}{1000} = \frac{1,33}{1000} = 1,33 \cdot 10^{-3}.$$

Zatem poszukiwane prawdopodobieństwo twardego lądowania, według ekspertów, wynosi

$$p \approx 1,33 \cdot 10^{-3} \text{ w jednym lądowaniu.}$$

PRZYKŁAD 5.15

W ramach analizy ryzyka utraty życia przez pieszego podczas przechodzenia przez jezdnię w pewnej miejscowości zespół 5 ekspertów oszacował liczbę

zgonów pieszych przypadającą na 1000 potrażeń przez samochód osobowy jadący z prędkością $v = 60$ km/h. Liczby n_i zgonów podane przez poszczególnych ekspertów zamieszczone są w tabeli 5.17. Opierając się na opiniach eksperckich, należy oszacować prawdopodobieństwo Z utraty życia przez przechodnia jako skutku najechania przez samochód osobowy z podaną prędkością.

Tabela 5.17. Liczba n_i zgonów przechodnia podana przez ekspertów

Nr eksperta	1	2	3	4	5
Liczba n_i zgonów przypadająca na 1000 najechań	250	180	220	190	240

Rozwiązanie

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, przyjmujemy, że poszukiwane prawdopodobieństwo Z jest w przybliżeniu równe częstości w zgonów. Częstości wynikające z informacji podanych przez poszczególnych ekspertów różnią się między sobą i wynoszą:

$$w_1 = \frac{n_1}{1000} = \frac{250}{1000} = 0,25$$

oraz obliczane analogicznie $w_2 = 0,18$, $w_3 = 0,22$, $w_4 = 0,19$, $w_5 = 0,24$. Zgodnie ze wzorem (5.26) średnia częstość wynosi więc

$$w = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 w_i = \frac{1}{5} (0,25 + 0,18 + 0,22 + 0,19 + 0,24) = 0,216.$$

Zatem prawdopodobieństwo utraty życia przez przechodnia najechanego przez samochód wynosi $Z \approx 0,22$.

PRZYKŁAD 5.16

Kierownictwo partii X, chcąc zmniejszyć koszty oszacowania stopnia poparcia w nadchodzących wyborach, postanowiła dokonać tego oszacowania przy użyciu metody eksperckiej. Powołano grupę 6 ekspertów – znawców sceny politycznej kraju i nastrojów społecznych. Ekspertów zapytano, ilu spośród wirtualnej, reprezentatywnej próbki wyborców o liczebności 1000 poprze partię X w zbliżających się wyborach. Odpowiedzi poszczególnych ekspertów są zamieszczone w tabeli 5.18. Na podstawie przedstawionych w niej informacji należy oszacować prawdopodobieństwo p [%] poparcia przez obywateli tej partii w wyborach.

Tabela 5.18. Liczba osób popierających partię podana przez ekspertów

Nr eksperta	1	2	3	4	5	6
Liczba n_i osób w próbie 1000 wyborców popierających partię X	70	60	65	80	60	55

Rozwiązanie

Na podstawie opinii eksperckich zawartych w tabeli 5.18 można, jak w poprzednim przykładzie, wyznaczyć wskaźnik poparcia w_i (częstość) wynikający z opinii każdego z N ekspertów, a następnie obliczyć średnią w z wartości w_i . Oszacowania prawdopodobieństwa $p \approx w$ można dokonać także w inny sposób: najpierw wyznaczyć średnią liczbę n wyborców popierających (według ekspertów) partię X, a następnie obliczyć wskaźnik w jej poparcia według wzoru

$$w = \frac{n}{1000}. \quad (5.28)$$

Oszacowania $p \approx w$ dokonamy tym właśnie, drugim sposobem. Liczba n jako średnia z opinii poszczególnych ekspertów wynosi

$$n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i = \frac{1}{6} (70 + 60 + 65 + 80 + 60 + 55) = 65.$$

Częstość w wynosi więc

$$w = \frac{n}{1000} = \frac{65}{1000} = 6,5\%.$$

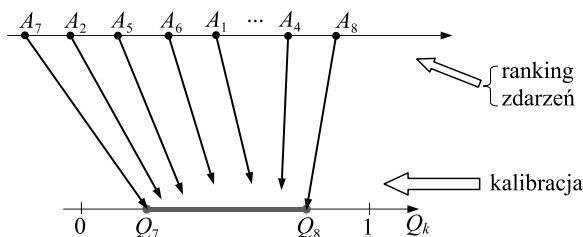
Zatem poszukiwane prawdopodobieństwo poparcia partii X w zbliżających się wyborach wynosi, według ekspertów, $p \approx 6,5\%$.

METODA RANKINGOWA

Metoda rankingowa jest lepszą metodą ekspercką niż metoda przedstawiona powyżej wtedy, gdy zachodzi konieczność eksperckiego oszacowania prawdopodobieństw wystąpienia większej liczby zdarzeń. Tak jest na przykład podczas analizowania ryzyka. Do tego rodzaju analiz typuje się w wyniku identyfikacji zagrożeń zwykle kilkanaście lub więcej zdarzeń, a proporcje między prawdopodobieństwami ich zajścia są szczególnie ważne (ważniejsze od wartości bezwzględnych).

Metoda rankingowa jest oparta na uszeregowaniach tych zdarzeń, dokonywanych przez zespół ekspertów, zwykle w formie ankiet, od najmniej prawdopodobnego do najbardziej prawdopodobnego (w określonym czasie, np. w ciągu 1 roku), co w sposób poglądowy jest przedstawione na rysunku 5.9. Takie indywidualne uszeregowania ekspertów są przez kierownika zespołu uśredniane w celu

utworzenia jednego rankingu zdarzeń. Ustalanie łącznej, uśrednionej pozycji liczbowej (*poz*) zdarzenia w rankingu może się odbywać na przykład w formie tabelarycznej (patrz przykład 5.17). W celu określenia liczbowych wartości prawdopodobieństwa Q każdego ze zdarzeń na skali wartości między 0 a 1 przeprowadza się tak zwaną kalibrację (skalowanie) uszeregowania zdarzeń na tej skali. W praktyce analiz ryzyka wielkości Q mogą także przybierać wartości większe niż 1, są wówczas traktowane jako częstotliwości.



Rys. 5.9. Koncepcja metody rankingowej

Do kalibrowania stosuje się zwykle wyrażenie [1]

$$\log Q = a(\text{poz}) + b, \quad (5.29)$$

gdzie a i b są nieznanymi współczynnikami kalibrującymi. Do ich wyznaczenia konieczna jest znajomość wartości prawdopodobieństw co najmniej dwóch zdarzeń w rankingu. Dokładność kalibracji jest tym większa, im zdarzenia te są bardziej oddalone od siebie w rankingu.

W praktyce dąży się do tego, by były to zdarzenia skrajne w uśrednionym rankingu (w przykładzie przedstawionym na rysunku 5.9 są to zdarzenia A_7 i A_8). Znajomość prawdopodobieństw Q_d (z dołu rankingu) i Q_g takich zdarzeń oraz ich uśrednionej pozycji w rankingu pozwala na wyznaczenie współczynników a i b w wyrażeniu (5.29), a to z kolei – na wyznaczenie, przy użyciu tego samego wyrażenia, wszystkich prawdopodobieństw uszeregowanych w rankingu.

Prawdopodobieństwo Q_g może być oszacowane względnie łatwo (gdyż jego wartość jest zwykle stosunkowo duża) metodą bezpośredniego szacowania. Znacznie trudniejsze jest oszacowanie metodą ekspercką prawdopodobieństwa Q_d , zwykle bardzo małego. W takim przypadku łatwiejsze może być oszacowanie stosunku ε prawdopodobieństw skrajnych w rankingu ($\varepsilon = Q_g/Q_d$), wielkości na ogół względnie dużej. Można tego dokonać także metodą ekspercką bezpośredniego szacowania. Jeśli jest znane ε , to

$$Q_d = \frac{Q_g}{\varepsilon}. \quad (5.30)$$

Sposób wyznaczania prawdopodobieństw zdarzeń A_i przy użyciu metody rankingowej prześledzimy na przykładach (przyjmowane w nich informacje i dane są hipotetyczne).

PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 5.17

W ramach identyfikacji zagrożeń, przeprowadzonej dla operatora wózka widłowego w hangarze, wytypowano 7 następujących zdarzeń:

- A_1 – kolizja z przeszkodą,
- A_2 – przewrócenie się wózka wskutek uszkodzenia hamulców,
- A_3 – upadek przy wychodzeniu z wózka,
- A_4 – kontakt dłoni z gorącymi elementami silnika,
- A_5 – uderzenie w dłoń narzędziem podczas kontroli stanu mechanizmów,
- A_6 – upadek pracownika hangaru podczas przemieszczania się pieszo po terenie hangaru,
- A_7 – przygniecenie dłoni pracownika przez zasuwane drzwi hangaru.

Postanowiono oszacować prawdopodobieństwa ich zajścia w ciągu 1 roku i dokonać tego przy użyciu metody rankingowej. W tym celu powołano zespół pięciu ekspertów. Każdy z nich w przygotowanych wcześniej ankietach uszeregował wymienione zdarzenia od najmniej prawdopodobnego do najbardziej prawdopodobnego. Wyniki tego szeregowania są przedstawione w tabeli 5.19. Okazało się po uśrednieniu rankingu, że skrajnymi w nim zdarzeniami są A_2 i A_4 (tab. 5.20). Na użytek metody rankingowej ci sami eksperci oszacowali następnie, stosując metodę bezpośredniego szacowania, prawdopodobieństwa zajścia w ciągu 1 roku zdarzeń skrajnych w rankingu. Wynoszą one: $Q_2 \equiv Q_d = 0,0027$ i $Q_4 \equiv Q_g = 0,12$.

Na podstawie tych informacji należy wyznaczyć prawdopodobieństwa zajść zdarzeń (w ciągu 1 roku) wskazanych w ramach identyfikacji zagrożeń.

Tabela 5.19. Uszeregowanie zdarzeń w rankingu przez ekspertów

Ekspert	Pozycja zdarzenia w rankingu						
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
Ekspert 1	3	1	4	7	5	2	6
Ekspert 2	1	2	3	5	7	1	6
Ekspert 3	3	2	4	6	5	1	7
Ekspert 4	3	1	5	7	6	2	4
Ekspert 5	2	1	4	7	5	3	6

Rozwiązanie

W celu utworzenia jednego rankingu zdarzeń indywidualne uszeregowania eksperckie należy uśrednić. Ustalanie łącznej, uśrednionej pozycji liczbowej (*poz*) każdego ze zdarzeń jest przedstawione w tabeli 5.20.

Tabela 5.20. Ustalanie średniej pozycji zdarzeń w rankingu

Ekspert	Pozycja zdarzenia w rankingu						
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
Ekspert 1	3	1	4	7	5	2	6
Ekspert 2	1	2	3	5	7	1	6
Ekspert 3	3	2	4	6	5	1	7
Ekspert 4	3	1	5	7	6	2	4
Ekspert 5	2	1	4	7	5	3	6
Suma numerów pozycji	12	7	20	32	28	9	29
Średnia pozycja <i>poz</i> (suma/5)	2,4	1,4	4,0	6,4	5,6	1,8	5,8

Liczby zawarte w ostatnim wierszu tabeli wskazują na uśrednioną pozycję liczbową poz_k zdarzenia A_k w rankingu. Te informacje są wystarczające do wyznaczenia współczynników a i b , występujących w relacji (5.29). W tym celu podstawiamy do niej odpowiednie dane dotyczące zdarzeń A_2 i A_4 , zdarzeń o znanych prawdopodobieństwach. W rezultacie otrzymujemy układ dwóch równań z dwoma niewiadomymi a i b :

$$\log 0,0027 = a \cdot 1,4 + b,$$

$$\log 0,12 = a \cdot 6,4 + b.$$

Jego rozwiązaniem są wartości współczynników: $a = 0,3296$, $b = -3,0300$.

Wyrażenie kalibrujące (5.29), umożliwiające wyznaczenie prawdopodobieństw Q_k wszystkich zidentyfikowanych zdarzeń, tzn. zdarzeń A_1 – A_7 , ma więc postać

$$\log Q_k = 0,3296 \cdot poz_k - 3,0300,$$

gdzie $k = 1, 2, \dots, 7$. Po podstawieniu do tego wyrażenia wartości poz_k każdego ze zdarzeń A_k , umieszczone w ostatnim wierszu tabeli 5.20, otrzymujemy wartości prawdopodobieństw Q_k . Wynoszą one:

$$Q_1 = 0,0057, Q_2 = 0,0027, Q_3 = 0,0193, Q_4 = 0,1200, Q_5 = 0,0653, Q_6 = 0,0036, Q_7 = 0,0762.$$

PRZYKŁAD 5.18

W jednym z powiatów postanowiono przeprowadzić analizę ryzyka terenowego. W tym celu zespół pięciu odpowiednich ekspertów zidentyfikował 11 zdarzeń o największym ryzyku utraty zdrowia lub życia przez ludność zamieszkującą powiat. Są to zdarzenia:

- A_1 – wyciek płynnego chloru z cystern przewożonych torami kolejowymi przebiegającymi przez powiat,
- A_2 – wybuch pożaru propanu-butanu w magazynie zakładu produkcji chemicznej,
- A_3 – wyciek gazu palnego z rurociągu i utworzenie chmury gazowej,
- A_4 – wybuch pożaru zbiorników ropy naftowej w zakładzie produkcji chemicznej,
- A_5 – atak terrorystyczny na magazyn jednostki wojskowej,
- A_6 – awaria przesyłowej linii energetycznej zasilającej znaczną część terenu powiatu,
- A_7 – przerwanie tamy na rzece przepływającej przez powiat,
- A_8 – wystąpienie suszy na dużym obszarze powiatu,
- A_9 – napływ spoza powiatu chmury toksycznego gazu,
- A_{10} – wybuch epidemii grypy,
- A_{11} – pojawienie się huraganu na terenie powiatu.

Do przeprowadzenia analizy ryzyka związanego z tymi zdarzeniami konieczne jest oszacowanie prawdopodobieństw zajścia każdego z nich w ciągu 1 roku. Przyjmując, że będzie to dokonane przy użyciu metody rankingowej, każdy z ekspertów ustalił ranking wskazanych 11 zdarzeń od najmniej do najbardziej prawdopodobnego. Wyniki tego szeregowania są przedstawione w tabeli 5.21.

Tabela 5.21. Uszeregowanie zdarzeń w rankingu przez ekspertów

Ekspert	Pozycja zdarzenia w rankingu										
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}
Ekspert 1	5	7	3	4	2	6	1	10	8	9	11
Ekspert 2	6	5	2	4	1	8	3	11	10	7	9
Ekspert 3	5	7	2	4	1	8	3	9	10	6	11
Ekspert 4	7	5	4	1	3	9	2	8	10	6	10
Ekspert 5	5	6	3	4	1	7	2	11	9	8	10

Ponieważ po uśrednieniu opinii ekspertów okazało się, że skrajnymi zdarzeniami w rankingu są zdarzenia A_5 i A_8 , eksperci dokonali dodatkowo oszacowania prawdopodobieństwa $Q_g = P\{A_8\}$ zajścia w ciągu 1 roku zdarzenia najbardziej prawdopodobnego oraz stosunku n prawdopodobieństw skrajnych w rankingu, czyli współczynnika $\varepsilon = Q_g/Q_d$. W rezultacie zastosowania do tego metody bezpośredniego szacowania uzyskano wyniki: $Q_g = P\{A_8\} = 0,15$ oraz $\varepsilon = 1000$.

Korzystając z podanych informacji, należy oszacować prawdopodobieństwa zajść wszystkich zdarzeń (w ciągu 1 roku) wskazanych w ramach identyfikacji zagrożeń.

Rozwiązanie

Podobnie jak w przykładzie 5.19, uśredniamy pozycje liczbowe każdego ze zidentyfikowanych zdarzeń w powiecie. Wyniki są podane w ostatnich dwóch wierszach tabeli 5.22.

Tabela 5.22. Ustalanie średniej pozycji zdarzeń w rankingu

Ekspert	Pozycja zdarzenia w rankingu										
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}
Ekspert 1	5	7	3	4	2	6	1	10	8	9	11
Ekspert 2	6	5	2	4	1	8	3	11	10	7	9
Ekspert 3	5	7	2	4	1	8	3	10	11	6	9
Ekspert 4	7	5	4	1	3	9	2	8	11	6	10
Ekspert 5	5	6	3	4	1	7	2	11	9	8	10
Suma numerów pozycji	28	30	14	17	8	38	11	50	49	36	49
Średnia pozycja <i>poz</i> (suma/5)	5,6	6,0	2,8	3,4	1,6	7,6	2,2	10,0	9,8	7,2	9,8

Współczynniki a i b , występujące w relacji (5.29), wyznaczymy w rezultacie podstawienia do niej danych o prawdopodobieństwach zajścia zdarzeń A_5 i A_8 . W treści przykładu jest podana informacja o prawdopodobieństwie $Q_8 = P\{A_8\} = 0,15$, a prawdopodobieństwo $Q_5 = P\{A_5\}$ obliczamy przy użyciu wyrażenia (5.30).

$$Q_5 = \frac{Q_8}{\varepsilon} = \frac{0,15}{1000} = 1,5 \cdot 10^{-4}.$$

Relacja (5.29) zastosowana do zdarzeń A_5 i A_8 przybiera postać układu dwóch równań z dwoma niewiadomymi a i b :

$$\log 1,5 \cdot 10^{-4} = a \cdot 1,6 + b,$$

$$\log 0,15 = a \cdot 10 + b.$$

Jego rozwiązaniem są wartości współczynników: $a = 0,3571$, $b = -4,3953$.

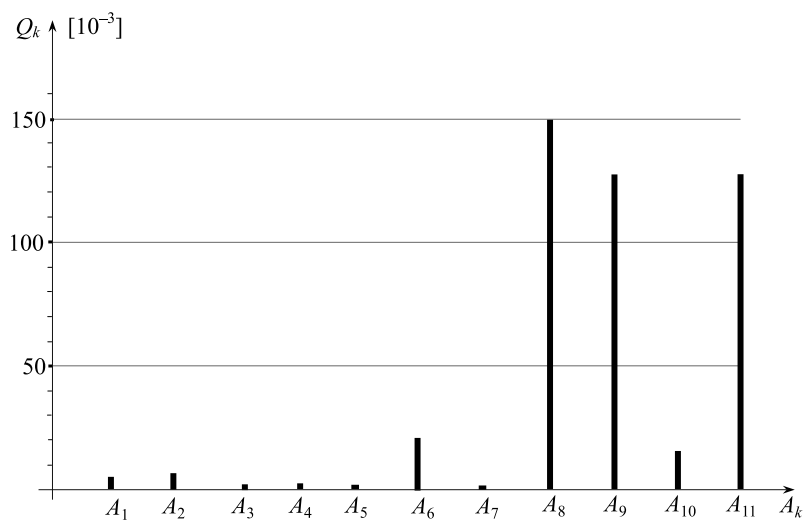
Wyrażenie kalibrujące (5.29), po wstawieniu do niego wartości współczynników a i b , przyjmuje postać

$$\log Q_k = 0,3571 \cdot \text{poz}_k - 4,3953.$$

Wyznaczone przy jego użyciu wartości prawdopodobieństw Q_k zdarzeń A_1 – A_{11} wynoszą:

$$Q_1 = 4,02 \cdot 10^{-3}, Q_2 = 5,61 \cdot 10^{-3}, Q_3 = 0,40 \cdot 10^{-3}, Q_4 = 0,66 \cdot 10^{-3}, Q_5 = 0,15 \cdot 10^{-3}, \\ Q_6 = 20,82 \cdot 10^{-3}, Q_7 = 0,25 \cdot 10^{-3}, Q_8 = 150 \cdot 10^{-3}, Q_9 = 127,15 \cdot 10^{-3}, Q_{10} = 14,99 \cdot 10^{-3}, \\ Q_{11} = 127,15 \cdot 10^{-3}.$$

Wyniki te są zilustrowane na rysunku 5.10.

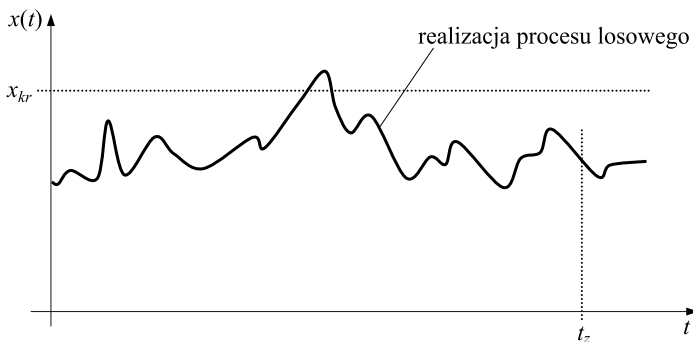


Rys. 5.10. Prawdopodobieństwa zajścia w ciągu 1 roku wybranych zdarzeń w rozważanym powiecie

Częścią działu matematyki pod ogólną nazwą probabilistyka jest teoria procesów stochastycznych. Zajmuje się ona zmiennymi losowymi, które są funkcjami nielosowego parametru, np. czasu. Na rysunku 6.1 pokazana jest w sposób poglądowy jedna realizacja procesu stochastycznego $x(t)$ ciągłego, czyli takiego, w którym parametr t może się zmieniać w sposób ciągły. W literaturze używa się zamiennie innych terminów do określenia procesu stochastycznego, takich jak: proces losowy lub funkcja losowa.

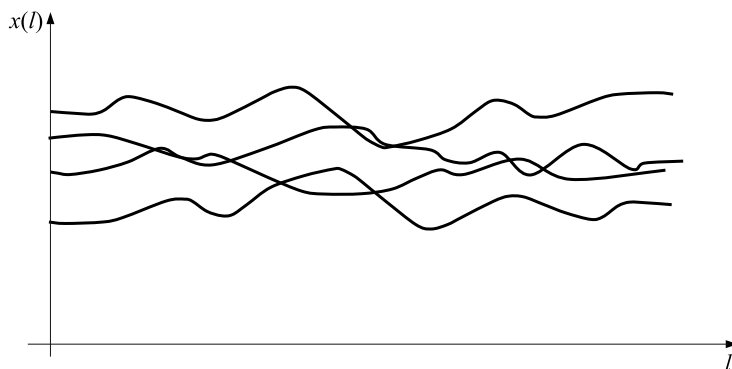
Przykładami procesu losowego, którego pojedyncza realizacja (czyli dotycząca pojedynczego egzemplarza w populacji generalnej) może przebiegać, jak na rysunku, są:

- naprężenia gnące oś samochodu,
- obciążenie elementów łyżki koparki,
- natężenie hałasu na stanowisku pracy w ciągu dnia,
- stężenie pyłu PM 2,5 w powietrzu w miejscu pomiaru,
- stężenie metanu mierzone w określonym miejscu w kopalni,
- naprężenia gnące w określonym fragmencie dźwigara lotniczego.



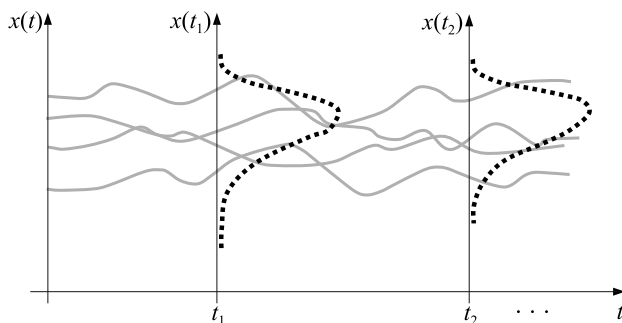
Rys. 6.1. Realizacja procesu losowego ciągłego (x_{kr} – poziom krytyczny, którego przekroczenie w czasie t_z jest niedopuszczalne)

Przebiegi realizacji tego samego procesu losowego w populacji generalnej obiektów różnią się między sobą, co pokazano na rysunku 6.2. Nielosowym parametrem na tym rysunku jest określona współrzędna przestrzeni $t \equiv l$. Realizacje przedstawione na tym rysunku mogą odzwierciedlać na przykład wysokość chropowatości powierzchni elementu, mierzona wzdłuż jego długości l , może to być także średnica liny stalowej mierzona na określonej długości itd.



Rys. 6.2. Proces losowy jako zbiór realizacji przebiegów $x(l)$ (l – odległość)

Proces stochastyczny można traktować jako zbiór możliwych realizacji, co jest przedstawione na rysunku 6.2, albo jako zbiór rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$, określanych dla dowolnego zbioru wartości parametru t (rys. 6.3).

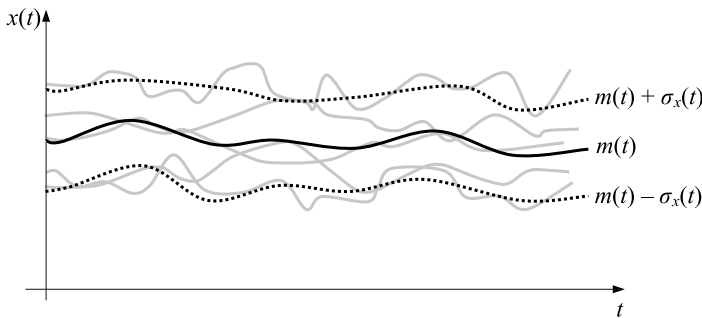


Rys. 6.3. Proces losowy jako zbiór rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$

W praktyce, zwłaszcza inżynierskiej, często ograniczamy się do charakteryzowania procesu stochastycznego za pomocą kilku parametrów, względnie łatwych do wyznaczenia. Są to:

- wartość oczekiwana procesu $Ex(t) \equiv m(t)$,
- wariancja procesu $Vx(t) = E[x(t) - m(t)]^2$ albo odchylenie standardowe $\sigma_x(t) = \sqrt{Vx(t)}$,
- funkcja korelacyjna $K(t, t + \tau) = E\{[x(t) - m(t)][x(t + \tau) - m(t + \tau)]\}$.

Wartość oczekiwaną $m(t)$ można traktować jako pewną średnią funkcję, wokół której grupują się wszystkie możliwe wartości procesu (rys. 6.4).



Rys. 6.4. Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe procesu stochastycznego $x(t)$

Wariancja $Vx(t)$ (lub odchylenie standardowe $\sigma_x(t)$) charakteryzuje rozmiar rozproszenia losowego wartości procesu w stosunku do wartości oczekiwanej.

Funkcja korelacyjna $K(t, t + \tau)$ określa zależność realizacji $x(t + \tau)$ procesu, określanej dla parametru $t + \tau$, od realizacji $x(t)$ procesu określanej dla parametru t . Im jest większa wartość funkcji korelacyjnej, tym zależność ta jest silniejsza i przebieg realizacji procesu $x(t)$ łagodniejszy (wolniej zmienny). Pokazano to w sposób poglądowy na rysunku 6.5.

Jak nietrudno zauważyć,

$$K(t, t) = Vx(t).$$

W praktyce często występują procesy stochastyczne, których cechy nie zmieniają się przy przesunięciu osi parametru t (np. osi czasu). Nazywane są one procesami stacjonarnymi. Rozróżnia się dwa rodzaje stacjonarności: w węższym sensie i w szerszym sensie.

Proces losowy jest stacjonarny w węższym sensie, jeśli jego rozkład prawdopodobieństwa, określony na przykład przez gęstość prawdopodobieństwa $f[x(t)]$, nie zależy od wartości parametru t . Można to zapisać w postaci

$$f[x(t)] = f(x) = \text{const.}$$

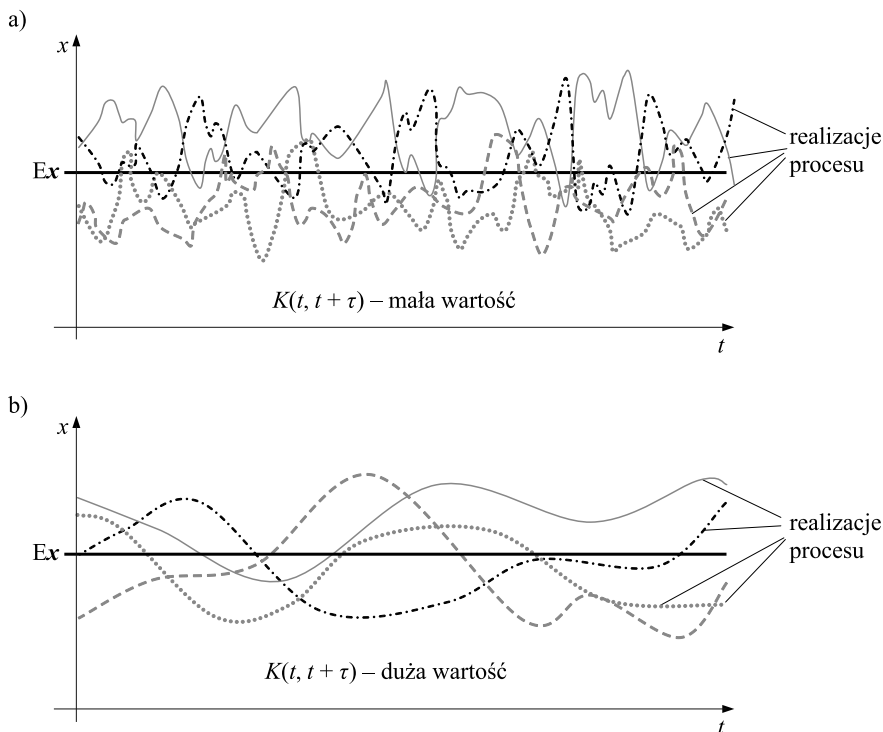
Wynika stąd, że również wartość oczekiwana i wariancja procesu są stałe i niezależne od parametru t , czyli

$$Ex(t) = \text{const.}, \quad Vx(t) = \text{const.}$$

Można przypuszczać, że taką cechę stacjonarności mają procesy przedstawione na rysunkach 6.5.

Proces losowy jest stacjonarny w szerszym sensie, jeśli dodatkowo, tzn. oprócz cechy $f[x(t)] = f(x)$, jego funkcja korelacyjna $K(t, t + \tau)$ również nie jest zależna od parametru t , a zależy jedynie od różnicy τ między wartościami parametru.

Z przebiegów realizacji procesów zilustrowanych na rysunku 6.5 można sądzić, że procesy te są stacjonarne nie tylko w węższym, lecz także w szerszym sensie.



Rys. 6.5. Przykład dwóch procesów stochastycznych (stacjonarnych w szerszym sensie): o małej (a) i o dużej (b) wartości funkcji korelacyjnej

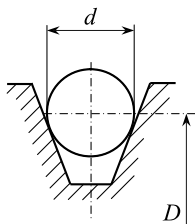
PRZYKŁAD 6.1

Różnice średnic skutecznych D rowków kół ciernych w pewnej klasie dźwigów osobowych mają duży wpływ na obciążenia pasm lin, które współpracują z kołami ciernymi podczas ruchu kabiny osobowej (rys. 6.6). W analizowanym dźwigu nominalne średnice rowków kół ciernych i lin wynoszą odpowiednio: $D_o = 520$ mm, $d_o = 13$ mm.

Odchylenie $\Delta(t)$ średnicy skutecznej od nominalnej jej wartości D_o , spowodowane losową zmiennością średnicy $d(t)$ liny wzdłuż długości liny t , jest procesem stochastycznym z parametrem t . Na podstawie przeprowadzonych pomiarów średnic lin stwierdzono, że jest to proces stacjonarny, a funkcja korelacyjna tego procesu może być przedstawiona w postaci

$$K(t, t + \tau) = B e^{-\alpha |\tau|} (1 + \alpha |\tau|), \quad (6.1)$$

przy czym: τ [m] – odległość między miejscami pomiaru średnicy liny, $B = V\Delta(t) = (0,4 \text{ mm})^2$, $\alpha = 1,5 \text{ 1/m}$ – współczynnik. Należy narysować i skomentować wykres funkcji korelacyjnej.



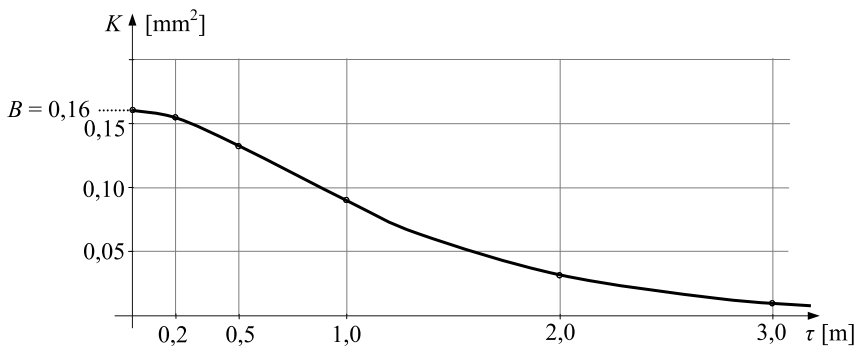
Rys. 6.6. Współpraca liny stalowej z rowkiem koła ciernego

Rozwiązanie

Przybliżony przebieg wykresu funkcji korelacyjnej (6.1) można sporządzić w rezultacie jej obliczenia dla kilku wybranych wartości parametru τ . Wyniki obliczeń są zawarte w tabeli 6.1, a wykonany na ich podstawie wykres jest przedstawiony na rysunku 6.7.

Tabela 6.1. Wyniki obliczeń funkcji korelacyjnej

Parametr τ [m]	0	0,2	0,5	1,0	2,0	3,0
Funkcja $K(t, t + \tau)$ [mm ²]	0,16	0,15	0,13	0,09	0,03	0,01



Rys. 6.7. Zależność funkcji korelacyjnej od odległości miejsc pomiaru średnicy liny

Z przebiegu wykresu wynika, że losowy proces zmian $\Delta(t)$ średnicy skutecznej zachodzi powoli. Tak na przykład realizacja średnicy skutecznej w określonym miejscu liny względnie silnie zależy od realizacji tej średnicy we wcześniejszym jej przekroju odległym o $\tau = 1$ metr. Świadczy o tym duża wartość funkcji korelacyjnej w stosunku do wariancji procesu, czyli tak zwany współczynnik korelacji

$$\frac{K(t, 1)}{V\Delta(t)} = \frac{0,09}{0,16} \approx 0,56.$$

Badany proces zmian średnicy skutecznej jest więc procesem wolnozmiennym.

W zależności od charakteru wartości przyjmowanych przez proces stochastyczny $x(t)$ i przez nielosowy parametr t wyróżnia się kilka rodzajów procesów stochastycznych, określonych w tabeli 6.2.

Tabela 6.2. Rodzaje procesów stochastycznych

Wartości parametru t Wartości procesu x	ciągły	dyskretny
ciągłe	<i>cc</i>	<i>dc</i>
dyskretny	<i>cd</i>	<i>dd</i>

Procesy, których realizacje są pokazane na rysunkach 6.1–6.5, należą do grupy *cc*. Tego typu procesami odwzorowuje się wiele zjawisk analizowanych w inżynierii.

Jeśli wartości takich procesów są określone w chwilach dyskretnych, to należą one do grupy *dc*. Przykładem takiego procesu może być stężenie pyłu PM 2,5 w powietrzu, rejestrowane jednak w dyskretnych chwilach, np. co godzinę.

Do grupy procesów typu *cd* zalicza się te, w których parametr t zmienia się w sposób ciągły, ale wartości x są dyskretny. Jako przykład takiego procesu można podać liczbę zmian naprężeń w jednostce czasu lotu w przekroju dźwigara statku powietrznego.

Przykładem procesu typu *dd*, czyli takiego, w którym zarówno parametr t , jak i wartości x przybierają wartości dyskretny, może być liczba przekroczeń przez wspomniane naprężenia pewnego poziomu, określana w kolejnych takich samych lotach statku.

Procesy stochastyczne są klasyfikowane także ze względu na inne kryteria niż ciągłość lub nieciągłość wielkości t oraz x albo wspomniana wcześniej stacjonarność lub niestacjonarność. Na przykład, jeśli dla dowolnej wartości parametru t rozkład zmiennej losowej $x(t)$ jest normalny, to proces stochastyczny o takiej ceście jest nazywany procesem normalnym (lub gaussowskim).

Ważną grupą procesów stochastycznych są procesy Markowa. Są to takie procesy, których przebieg dla wartości parametru $t > t_0$ zależy tylko od wartości procesu $x(t_0)$ i nie zależy od jego przebiegu w przedziale wartości parametru $t < t_0$. Jeśli tym parametrem jest czas, to proces Markowa można też określić jako taki, w którym przyszłość nie zależy od przeszłości, jeśli znana jest terażniejszość. Szczególnym przypadkiem tych procesów są procesy z parametrem t zmieniającym się skokowo. Są one nazywane łańcuchami Markowa.

ZAŁĄCZNIKI

Załącznik 1

WARTOŚCI DYSTRYBUANTY STANDARYZOWANEGO ROZKŁADU NORMALNEGO

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Tabela Z.1. Wartości dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego

y	$\Phi(y)$	y	$\Phi(y)$	y	$\Phi(y)$	y	$\Phi(y)$
0,00	0,50000	1,00	0,84135	2,00	0,97725	3,00	0,99865
0,05	0,51994	1,05	0,85314	2,05	0,97982	3,05	0,99886
0,10	0,53983	1,10	0,86433	2,10	0,98214	3,10	0,99903
0,15	0,55962	1,15	0,87493	2,15	0,98422	3,15	0,99918
0,20	0,57926	1,20	0,88493	2,20	0,98610	3,20	0,99931
0,25	0,58971	1,25	0,89435	2,25	0,98778	3,25	0,99942
0,30	0,61791	1,30	0,90320	2,30	0,98928	3,30	0,99952
0,35	0,63683	1,35	0,91149	2,35	0,99061	3,35	0,99960
0,40	0,65542	1,40	0,91924	2,40	0,99180	3,40	0,99966
0,45	0,67365	1,45	0,92647	2,45	0,99286	3,45	0,99972
0,50	0,69146	1,50	0,93319	2,50	0,99379	3,50	0,99977
0,55	0,70884	1,55	0,93943	2,55	0,99461	3,55	0,99981
0,60	0,72575	1,60	0,94520	2,60	0,99534	3,60	0,99984
0,65	0,74215	1,65	0,95053	2,65	0,99598	3,65	0,99987
0,70	0,75804	1,70	0,95543	2,70	0,99653	3,70	0,99989
0,75	0,77337	1,75	0,95994	2,75	0,99702	3,75	0,99991
0,80	0,78815	1,80	0,96407	2,80	0,99745	3,80	0,99993
0,85	0,80234	1,85	0,96784	2,85	0,99781	3,85	0,99994
0,90	0,81594	1,90	0,97128	2,90	0,99813	3,90	0,99993
0,95	0,82894	1,95	0,97441	2,95	0,99841	3,95	0,99996

Załącznik 2

WARTOŚCI KWANTYLA ROZKŁADU t STUDENTA

W tabeli podane są wartości kwantyla $t_{k,\alpha}$ (wynikającego z relacji $P\{t < t_{k,\alpha}\} = \alpha$)

Tabela Z.2. Wartości kwantyla rozkładu t Studenta

k	$t_{k,0,950}$	$t_{k,0,975}$	$t_{k,0,990}$	$t_{k,0,995}$	k	$t_{k,0,950}$	$t_{k,0,975}$	$t_{k,0,990}$	$t_{k,0,995}$
1	6,314	12,706	31,821	63,657	18	1,734	2,101	2,552	2,878
2	2,920	4,303	6,965	9,925	19	1,729	2,093	2,539	2,861
3	2,353	3,182	4,541	5,841	20	1,725	2,086	2,528	2,845
4	2,132	2,776	3,747	4,604	21	1,721	2,080	2,518	2,831
5	2,015	2,571	3,365	4,032	22	1,717	2,074	2,508	2,819
6	1,943	2,447	3,143	3,707	23	1,714	2,069	2,500	2,807
7	1,895	2,365	2,998	3,499	24	1,711	2,064	2,492	2,797
8	1,860	2,306	2,896	3,355	25	1,708	2,060	2,485	2,787
9	1,833	2,262	2,821	3,250	26	1,706	2,056	2,479	2,779
10	1,812	2,228	2,764	3,169	27	1,703	2,052	2,473	2,771
11	1,796	2,201	2,718	3,106	28	1,701	2,048	2,467	2,763
12	1,782	2,179	2,681	3,055	29	1,699	2,045	2,462	2,756
13	1,771	2,160	2,650	3,012	30	1,697	2,042	2,457	2,750
14	1,761	2,145	2,624	2,977	40	1,684	2,021	2,423	2,704
15	1,753	2,132	2,602	2,947	60	1,671	2,000	2,390	2,660
16	1,746	2,120	2,583	2,921	120	1,658	1,980	2,358	2,617
17	1,740	2,110	2,567	2,898	∞	1,645	1,960	2,326	2,576

Załącznik 3

WARTOŚCI KWANTYLA ROZKŁADU F SNEDECORA

W tabeli podane są wartości f_{α, k_1, k_2} kwantyla rzędu $\alpha = 0,95$ rozkładu F Snedecora o k_1 i k_2 stopniach swobody.

Tabela Z.3. Wartości kwantyla rozkładu F Snedecora

k_2	k_1									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161,5	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	237,0	238,9	240,5	241,9
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,39	19,40
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,97	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
18	4,41	3,56	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,26
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,17
40	4,09	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91
∞	3,84	3,00	2,61	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83

Tabela Z.3. Wartości kwantyla rozkładu F Snedecora (cd.)

k_2	k_1									
	12	15	20	24	30	40	60	120	500	∞
1	243,9	246,0	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,0	254,3
2	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50	19,50
3	8,75	8,70	8,66	8,64	8,62	8,60	8,57	8,55	8,54	8,53
4	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,64	5,63
5	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,37	4,37
6	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,71	3,68	3,67
7	3,58	3,51	3,45	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,24	3,23
8	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,94	2,93
9	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,72	2,71
10	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,55	2,54
12	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,31	2,30
14	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,14	2,13
16	2,43	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	2,01
18	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,93	1,92
20	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,85	1,84
22	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,80	1,78
24	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,74	1,73
26	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,70	1,69
28	2,12	2,04	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71	1,67	1,65
30	2,09	2,02	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,64	1,62
40	2,00	1,93	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,53	1,51
60	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,41	1,39
120	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,27	1,25
∞	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,11	1,00

BIBLIOGRAFIA

1. Cooke R.M.: Experts in Uncertainty. Oxford University Press 1991.
2. Firkowicz Sz.: Statystyczne badanie wyrobów. WNT, Warszawa 1970.
3. Fisz M.: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1969.
4. Gajek L., Kałuszka M.: Wnioskowanie statystyczne. WNT, Warszawa 2000.
5. Plucińska A., Pluciński E.: Probabilistyka. WNT, Warszawa 2006.
6. Swain A.D., Guttman H.E.: Handbook of human reliability analysis with emphasis on nuclear power plant applications. NUREG/CR-1278, 1983.
7. Szopa T.: Niezawodność i bezpieczeństwo. Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa 2016.

Oficina Wydawnicza PW jest wydawnictwem największej polskiej uczelni technicznej — Politechniki Warszawskiej, prowadzącej działalność naukowo-dydaktyczną na 58 kierunkach studiów.



Publikacje wydawnictwa są dostępne w bibliotekach i księgarniach na terenie Politechniki Warszawskiej oraz innych uczelni, a także księgarniach technicznych na terenie całego kraju. Pełna oferta wydawnicza jest prezentowana na stronie internetowej:

www.wydawnictwopw.pl

Oficina Wydawnicza Politechniki Warszawskiej prowadzi sprzedaż:

- stacjonarną — w księgarni OWPW w Warszawie przy ul. Noakowskiego 18/20
- internetową — <http://www.wydawnictwopw.pl>
- wysyłkową
— tel. 22 234-75-03; e-mail: oficyna@pw.edu.pl

ISBN 978-83-8156-298-0



9 788381 562980